ゲームグラフィックス特論

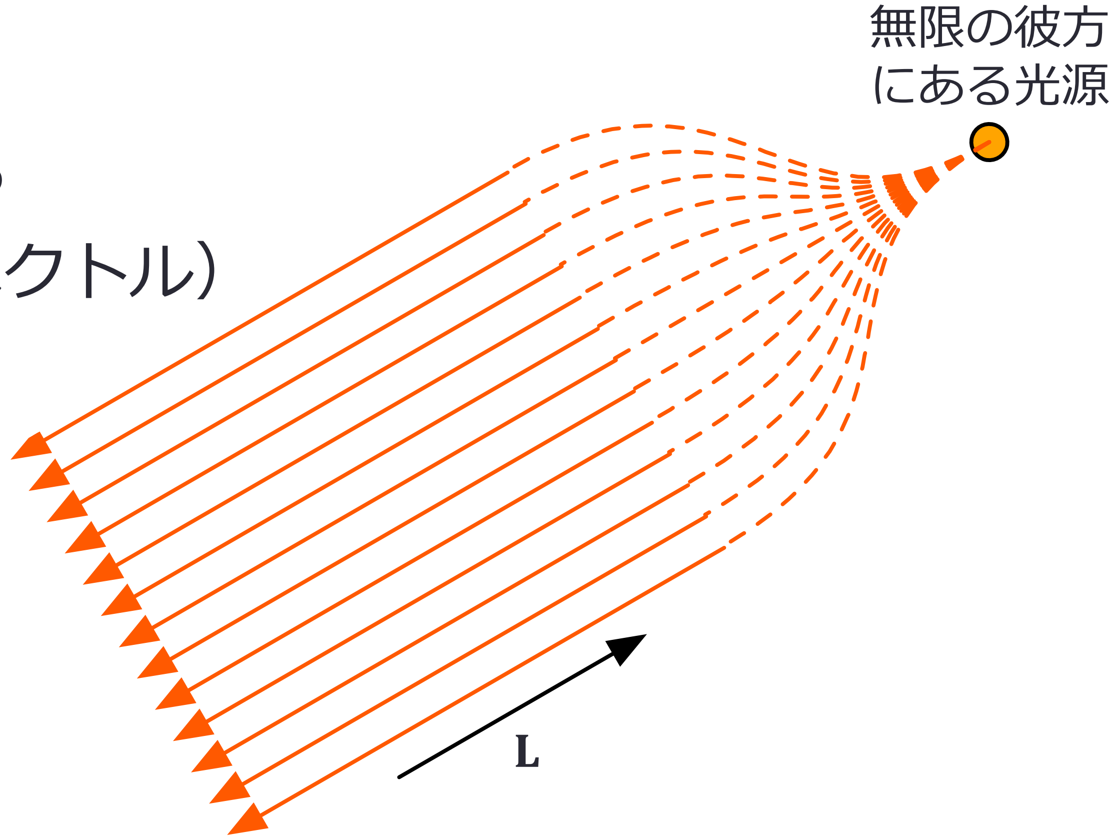
第7回 物理ベースの陰影付け

物理的に正確な照明計算

放射照度 (Irradiance) と放射輝度 (Radiance)

平行光源 (directional lights)

- 単一方向に進む光
  - 太陽のように極端に遠方にある光源
  - シーン中のどこでも同じ方向を向いている
  - 光線ベクトル $\mathbf{L}$（ワールド座標系，単位ベクトル）
    - 光線の進行方向とは逆

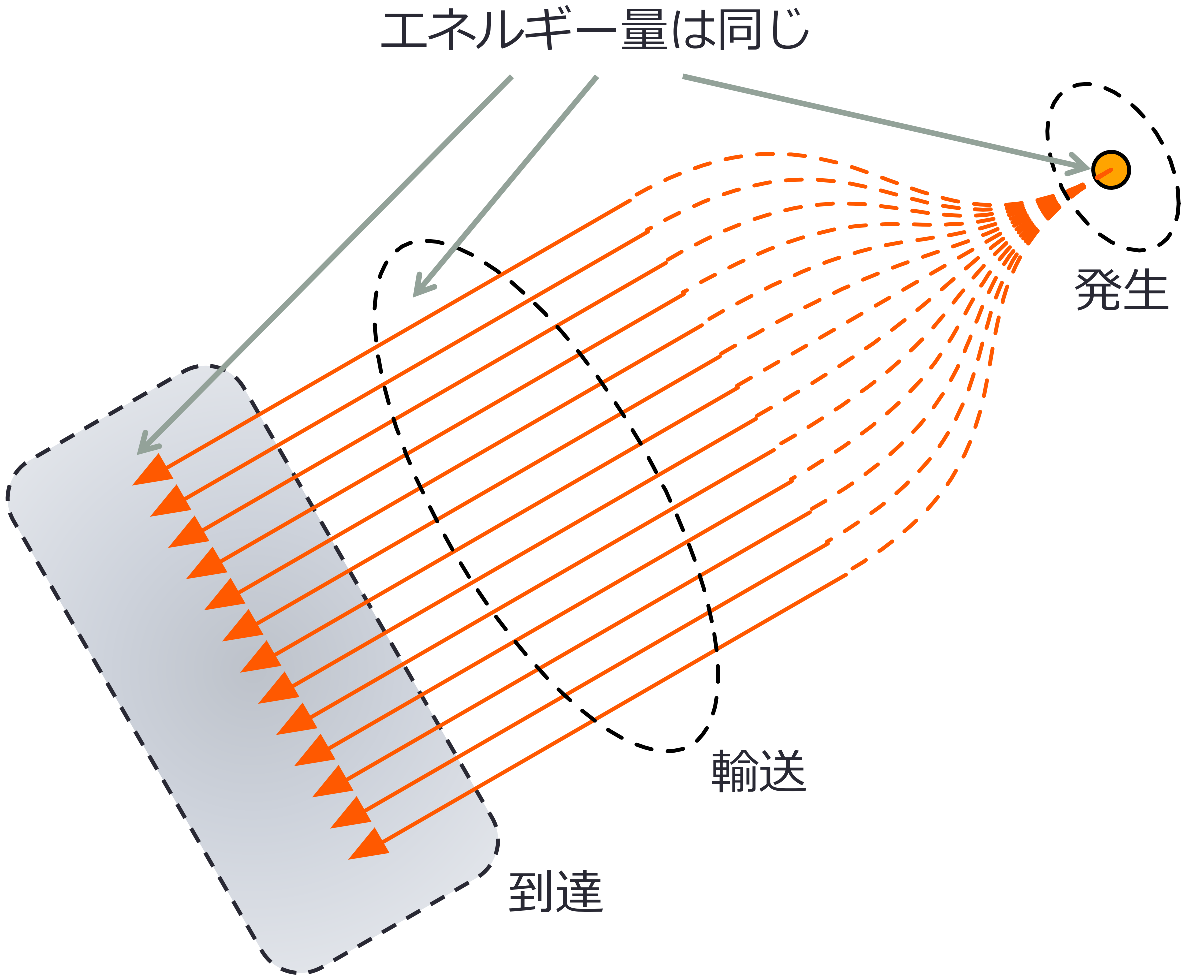


放射束 (radiant flux)

- 単位時間当たりのエネルギー
  - 単位 W (ワット)

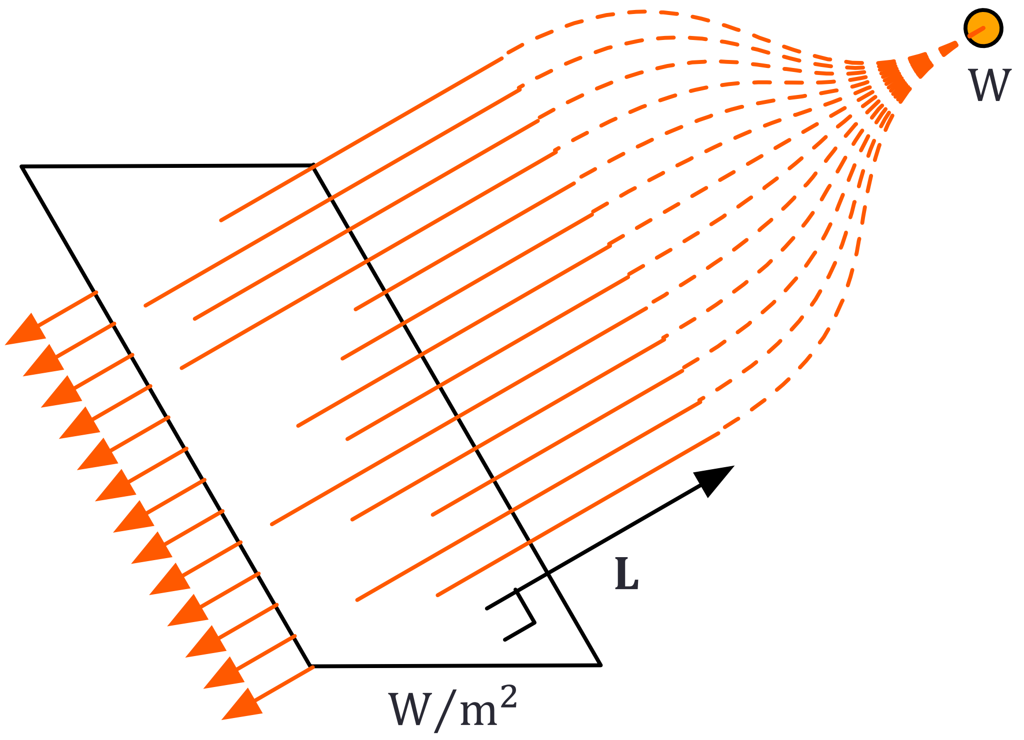
W = J/s
1秒あたりのエネルギー

「光束」は人間の目で
観測される光の強さ
単位 lm (ルーメン)



放射照度 (irradiance)

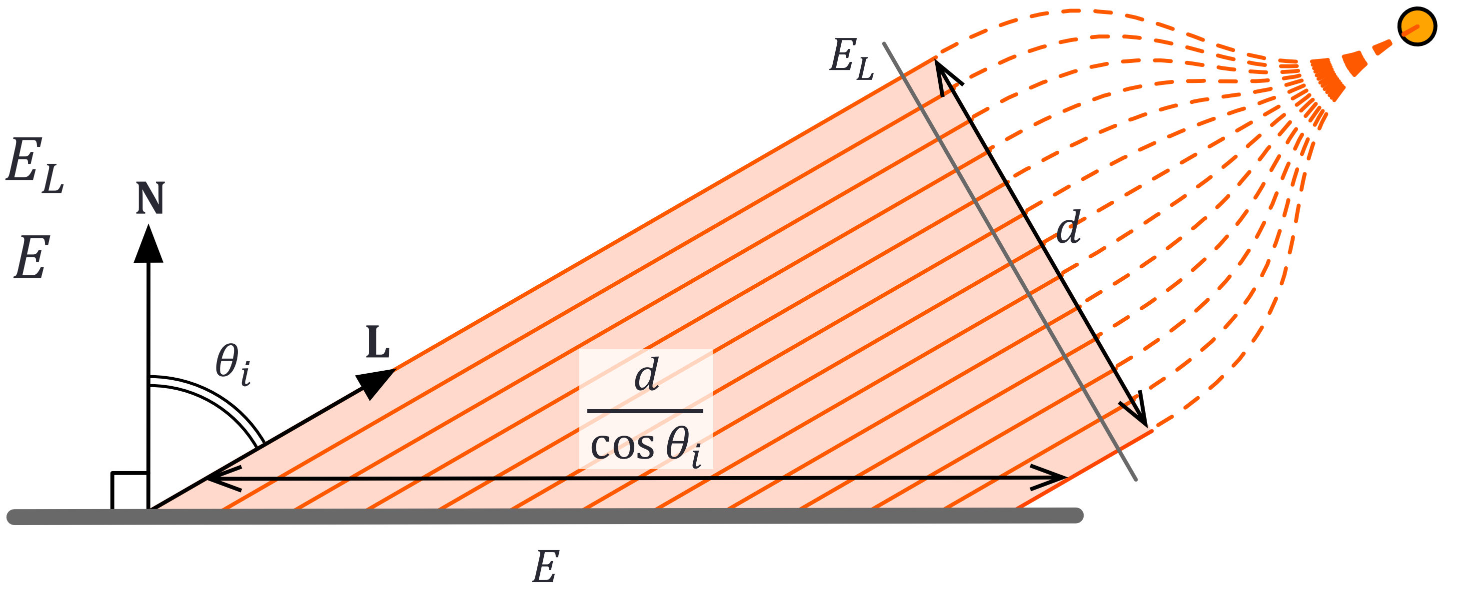
- **L** と直交する平面を通過する単位面積あたりのエネルギー
  - 単位 W/m^2



面の放射照度は入射光の放射照度で決定される

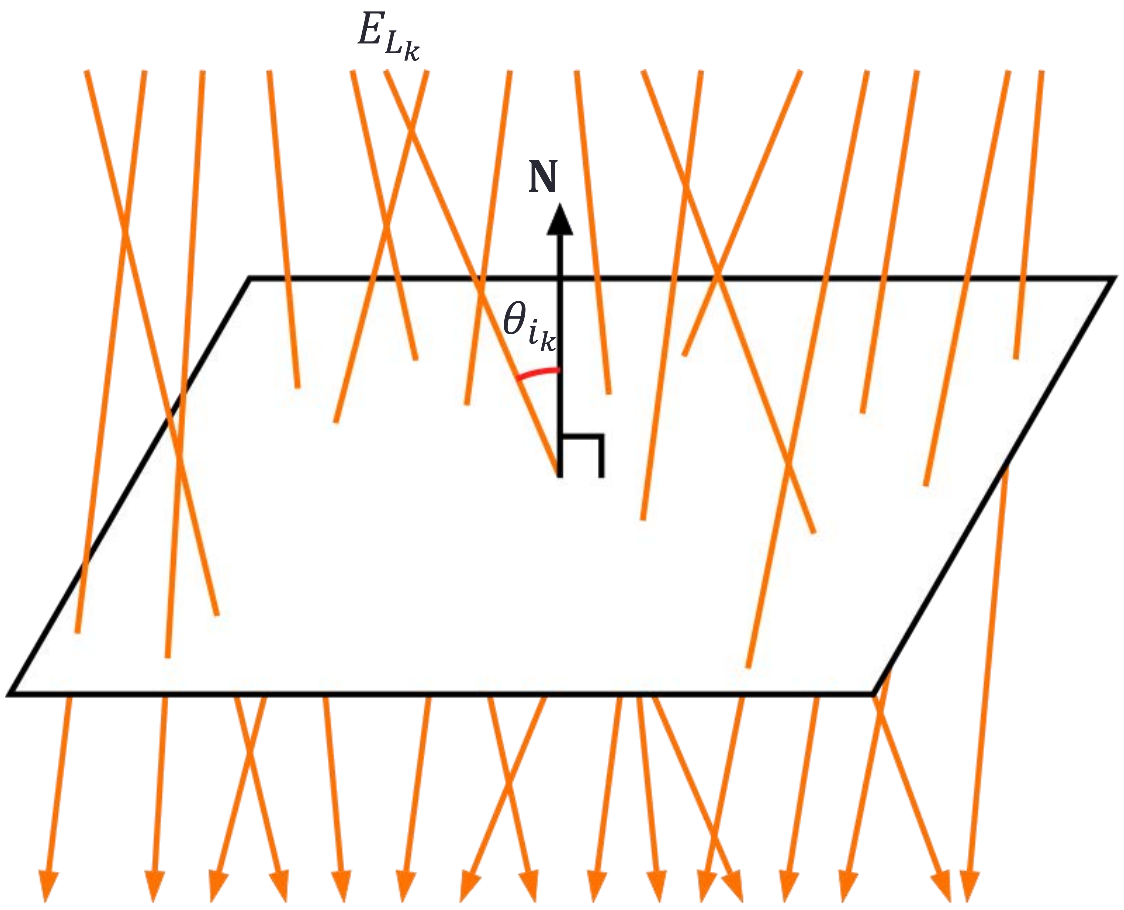
- $E = E_L \overline{\cos}\,\theta_i$
  - 面の法線ベクトル $\mathbf{N}$
  - 光線ベクトル $\mathbf{L}$
  - $\mathbf{L}$ と直交する面の放射照度 E_L
  - $\mathbf{N}$ と直交する面の放射照度 E
  - $\mathbf{N}$ と $\mathbf{L}$ のなす角 θ_i

$$\begin{aligned}\overline{\cos}\,\theta_i &= \max(\cos\theta_i\,, 0)\\ &= \max(\mathbf{N}\cdot\mathbf{L}, 0)\end{aligned}$$



任意の方向から入射する光の放射照度

- 光はあらゆる方向から到来する



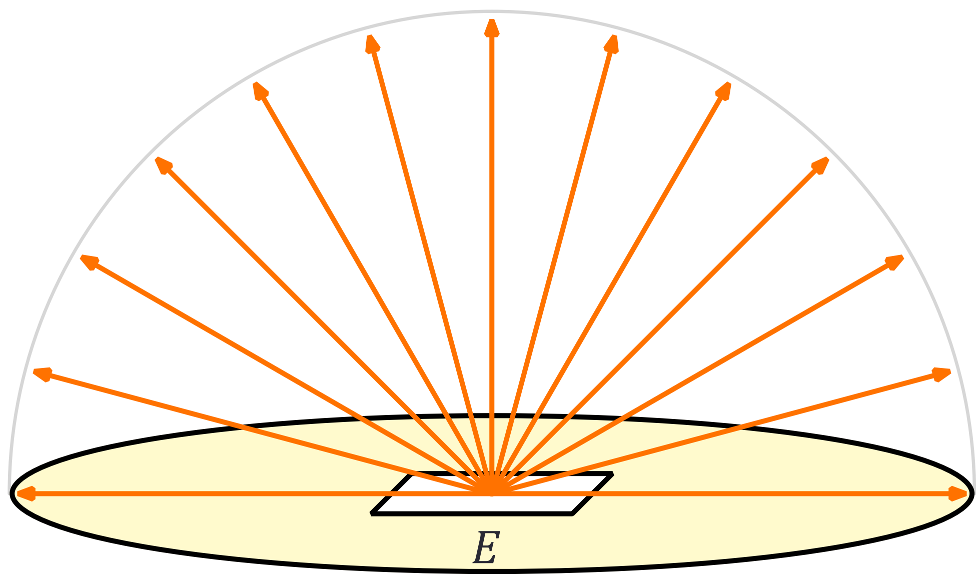
$$E = \sum_{k=1}^{n} E_{L_k} \overline{\cos}\, \theta_{i_k}$$

放射照度は
到来した光の
合計になる

放射発散度 (radiant exitance)

- 面から放射される単位面積あたりのエネルギー
  - 単位 $\mathrm{W/m^2}$
    - 入射光の照度は面の放射照度で計測する
    - 反射光の照度は放射発散度で計測する
- 面の色 c
  - 放射照度 E に対する放射発散度 M の割合
    - 色によって異なる
    - ０～１の値を持つ
    - CG では RGB のベクトルで表す

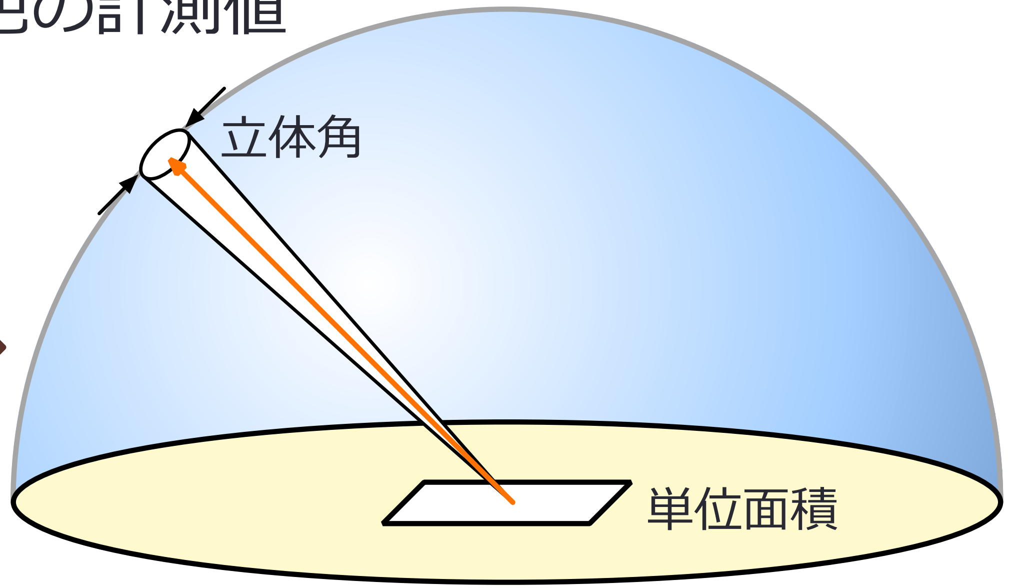
$$c = \frac{M}{E}$$

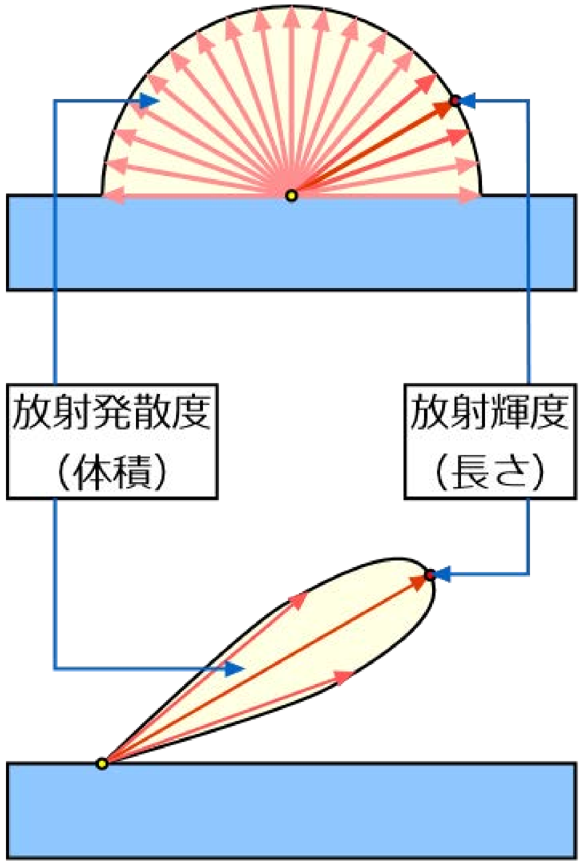


放射輝度 (radiance)

- ある点からある方向に放射されるエネルギー
  - 単位 $^{W}/_{sr \cdot m^2}$
    - sr：ステラジアン（立体角）
    - 単位面積あたりから発散する光の単位立体角あたりのエネルギー
  - 一本の光線の明るさと色の計測値

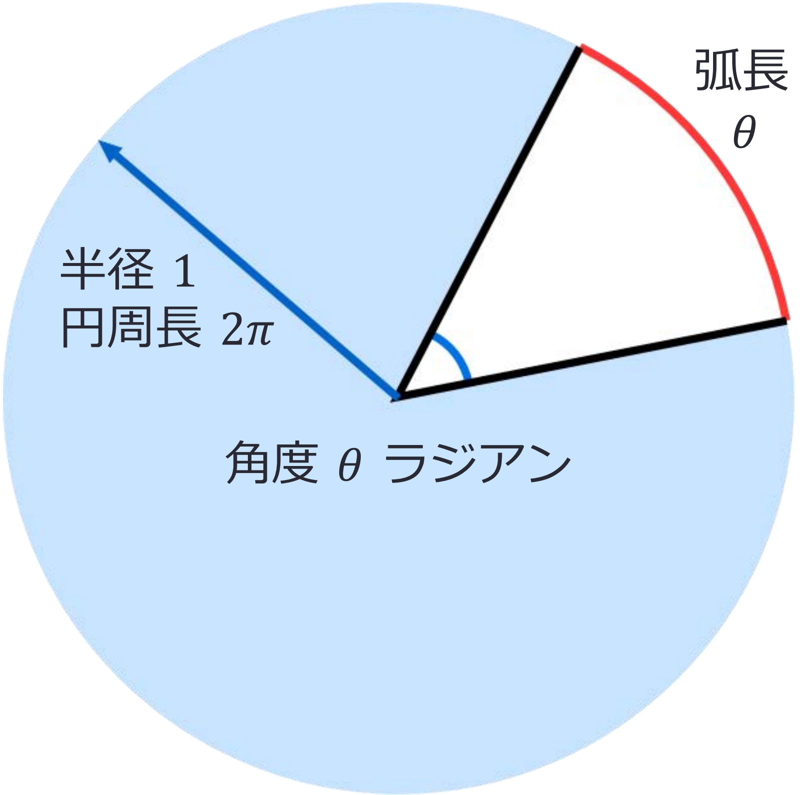
レンダリングは放射輝度を実際の画像系と同様に計測（計算）すること



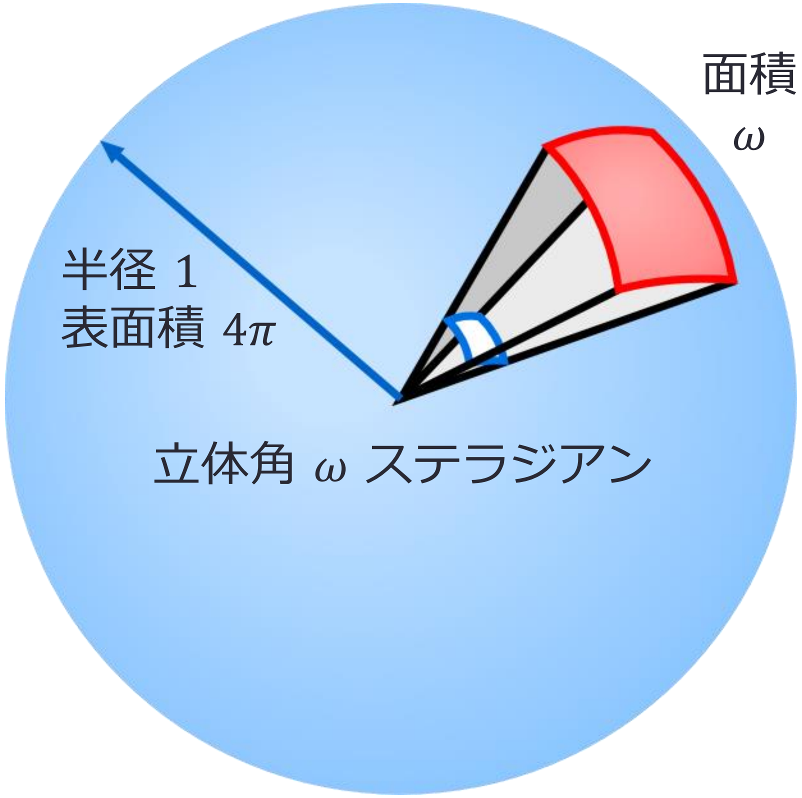


円周角と立体角

円周角 (radian)

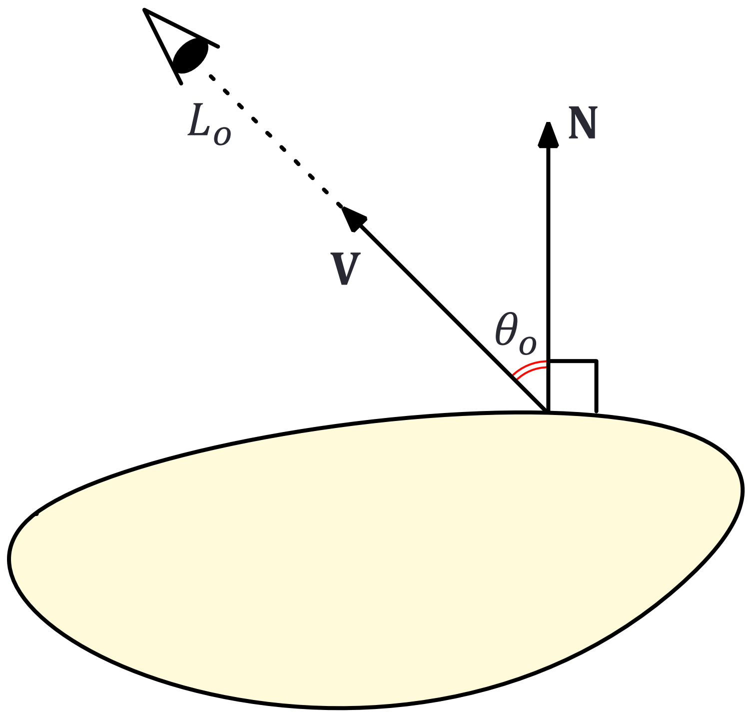


立体角 (steradian)



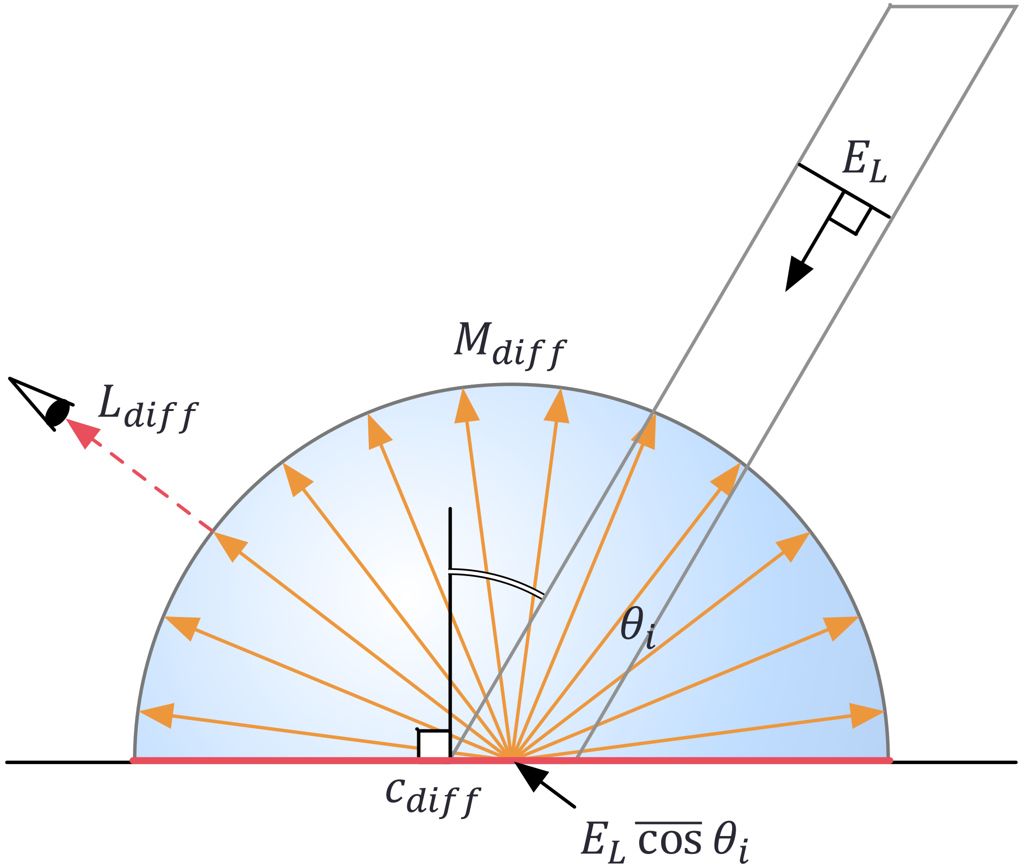
陰影付けとは

- **材質**特性（マテリアル）と**光源**情報をもとに視線ベクトル $\mathbf{V}$ 方向の放射輝度 L_o を計算すること



拡散反射光の放射輝度

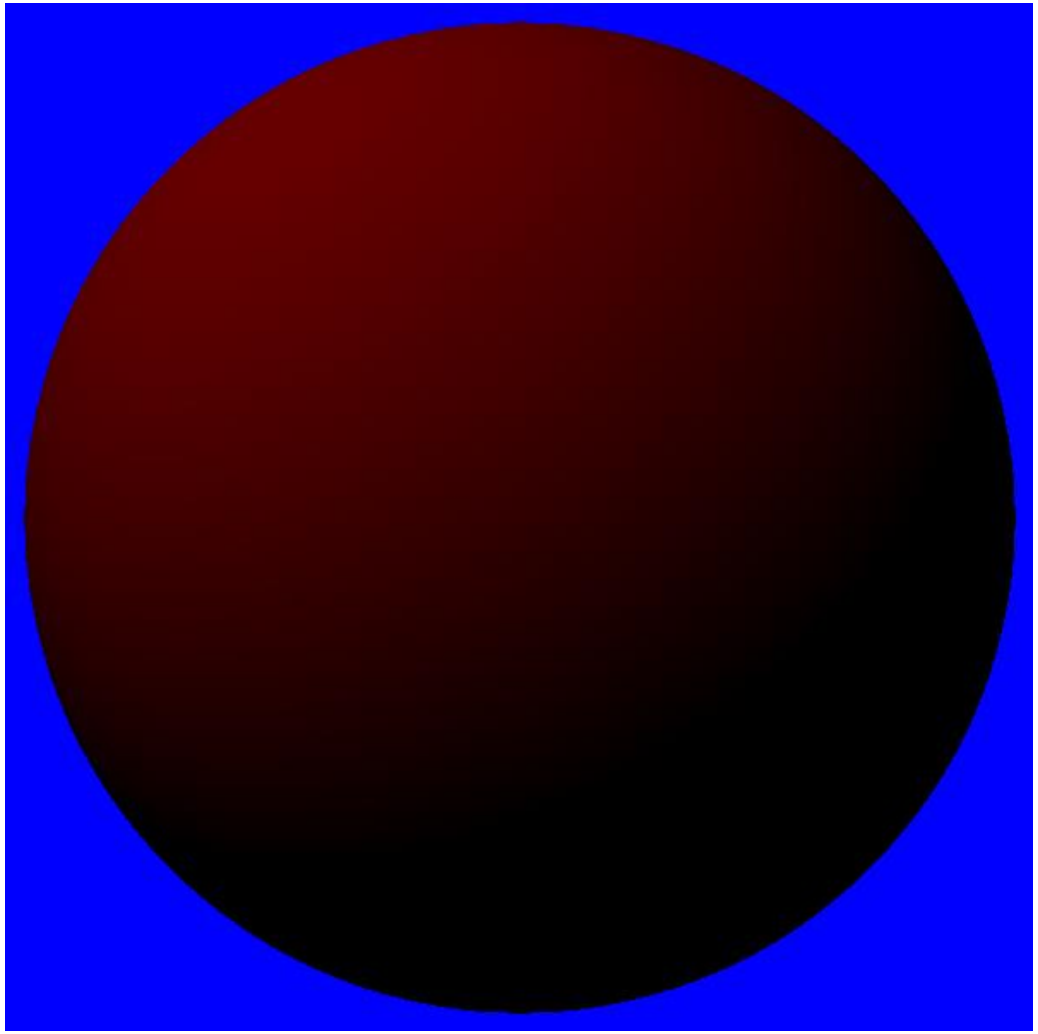
- 入射光の放射照度 E_L
- **拡散**反射光の放射発散度 M_{diff}
- **拡散**反射色 c_{diff}
- **拡散**反射光の放射輝度 L_{diff}
- 要素ごとの積 $\otimes$



$$M_{diff} = c_{diff} \otimes E_L \overline{\cos}\,\theta_i$$

$$L_{diff} = \frac{M_{diff}}{\pi} = \frac{c_{diff}}{\pi} \otimes E_L \overline{\cos}\,\theta_i$$

拡散反射光による陰影



鏡面反射光の放射輝度

- 入射光の放射照度 E_L
- **鏡面**反射光の放射発散度 $M_{spec} = c_{spec} \otimes E_L \overline{\cos}\, \theta_i$
- **鏡面**反射色 c_{spec}
- **鏡面**反射光の放射輝度 $L_{spec}(\mathbf{V}) = \dfrac{\boxed{m}+8}{8\pi} \overline{\cos}^{\boxed{m}}\, \theta_h\, M_{spec}$

$$= \frac{\boxed{m}+8}{8\pi} \overline{\cos}^{\boxed{m}}\, \theta_h\, c_{spec} \otimes E_L \overline{\cos}\, \theta_i$$

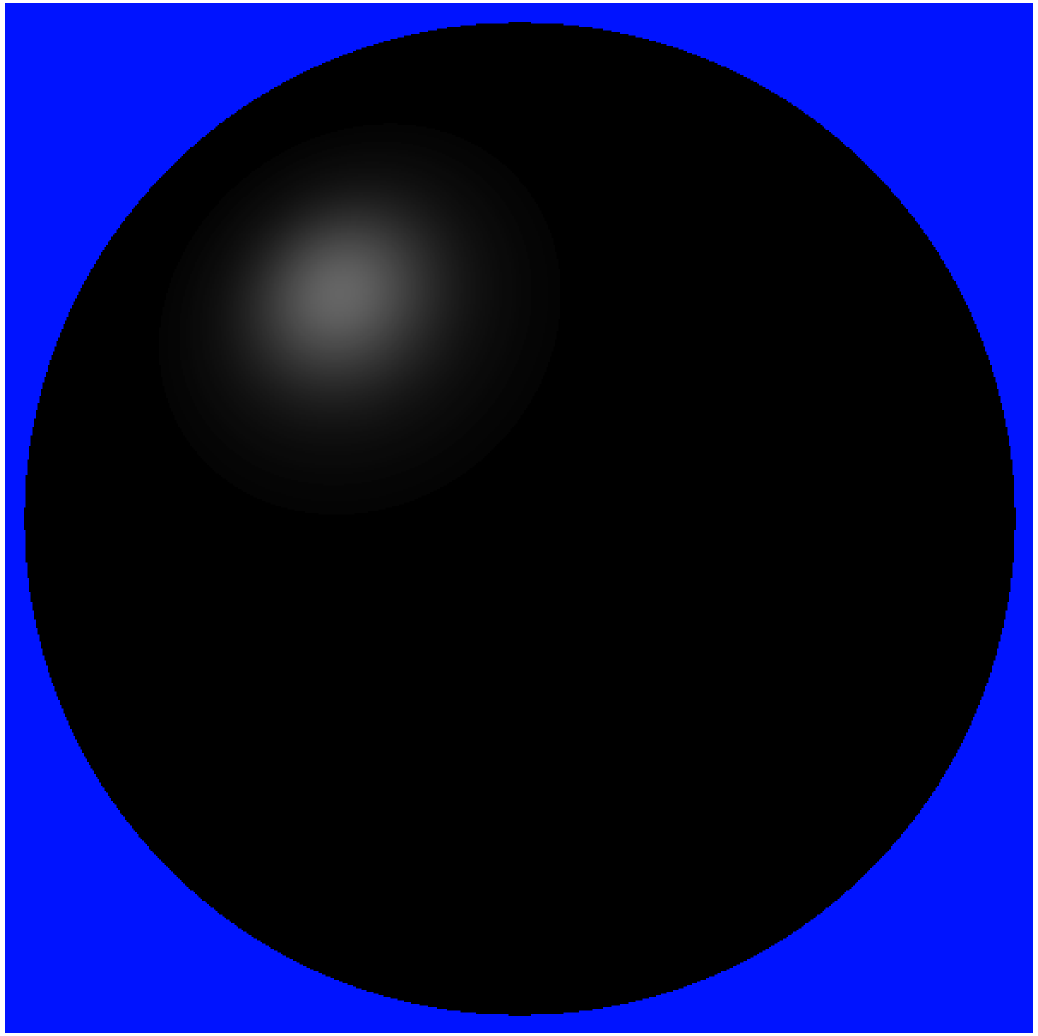
- 光線ベクトル $\mathbf{L}$
- 視線ベクトル $\mathbf{V}$

- 中間ベクトル $\mathbf{H} = \dfrac{\mathbf{L}+\mathbf{V}}{|\mathbf{L}+\mathbf{V}|}$

$\overline{\cos}^m\, \theta_h = \max(\mathbf{H}\cdot\mathbf{N}, 0)^m$

m : 輝き係数 (shininess)

鏡面反射成分による陰影



放射輝度

- 拡散反射成分と鏡面反射成分の和

$$L_o(\mathbf{V}) = \left(\frac{c_{diff}}{\pi} + c_{spec} \frac{m+8}{8\pi} \overline{\cos}^m \theta_h \right) \otimes E_L \overline{\cos} \theta_i$$

- 一般に使われている Blinn-Phong モデル

$$L_o(\mathbf{V}) = \left(c_{diff} \overline{\cos} \theta_i + c_{spec} \overline{\cos}^m \theta_h \right) \otimes B_L$$

B_L : “明るさ (brightness)”
↑
ad hoc に決定

陰影付け方程式の実装

- n 個の光源

$$L_o(\mathbf{V}) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left(\frac{c_{diff}}{\pi} + \frac{m+8}{8\pi} \overline{\cos}^m \theta_{h_k} c_{spec} \right) \otimes E_{L_k} \overline{\cos} \theta_{i_k} \right\}$$

$$K_{diff} = \frac{c_{diff}}{\pi}, \quad K_{spec} = \frac{m+8}{8\pi} c_{spec}, \quad K_{diff} + K_{spec} \leq 1$$

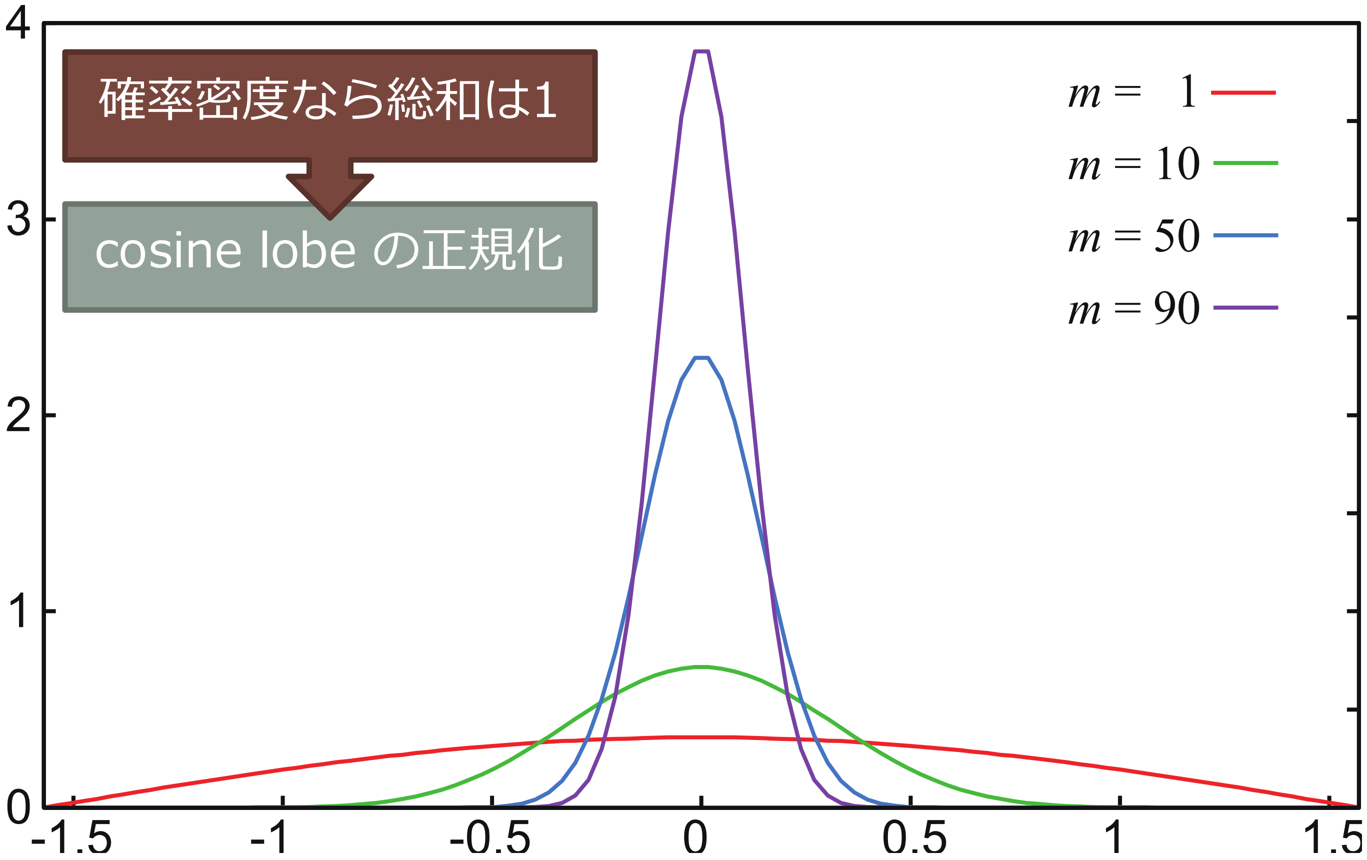
$$\Downarrow$$

$$L_o(\mathbf{V}) = \sum_{k=1}^{n} \{ (K_{diff} + K_{spec} \overline{\cos}^m \theta_{h_k}) \otimes E_{L_k} \overline{\cos} \theta_{i_k} \}$$

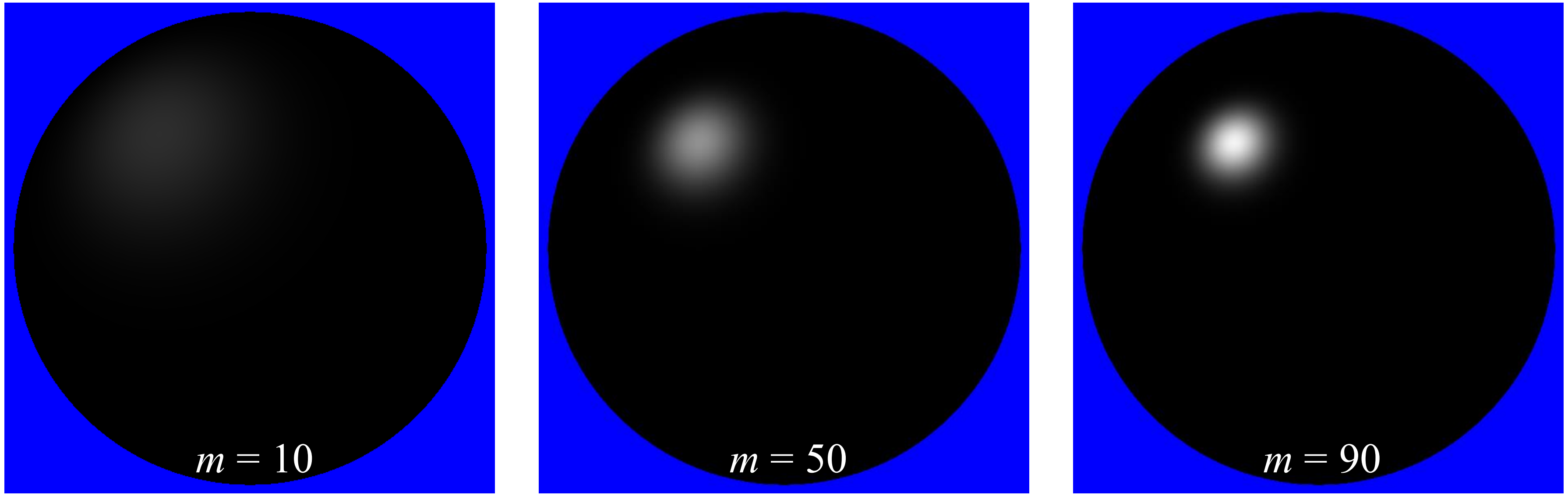
K_{diff} :拡散反射係数
K_{spec} :鏡面反射係数
$m = K_{shi}$:輝き係数

互いに依存している

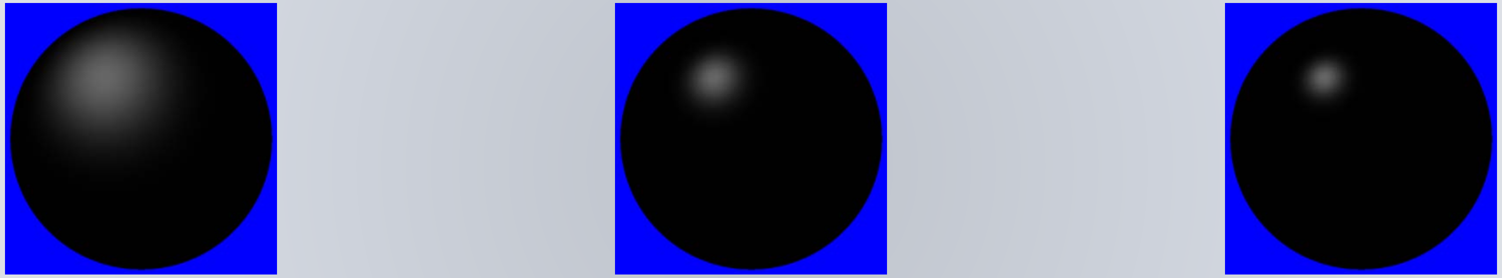
輝き係数


確率密度なら総和は1
cosine lobe の正規化
$m = 1$
$m = 10$
$m = 50$
$m = 90$
4
3
2
1
0
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5

輝き係数によるハイライトの制御



小 ← m → **大**



正規化しない場合

BRDF

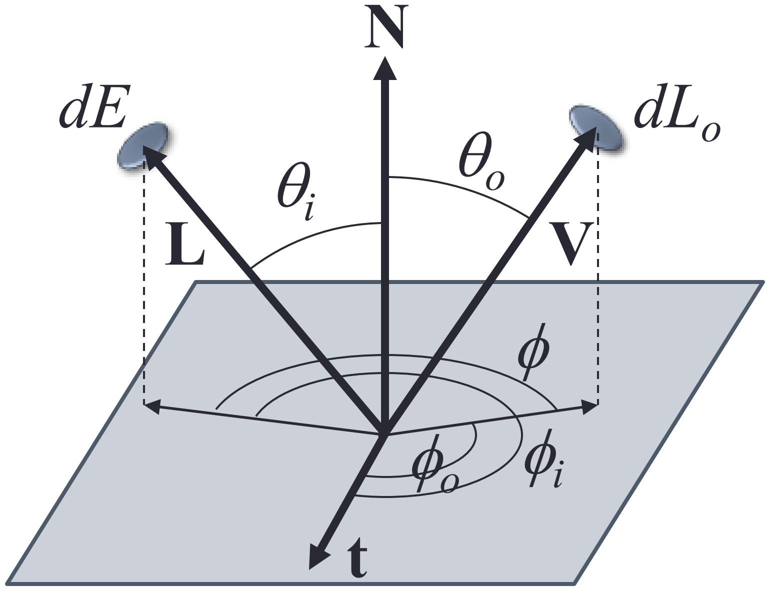
双方向反射率分布関数

BRDF

- Bidirectional Reflectance Distribution Function
  - 双方向反射率分布関数
- $\mathbf{L}$ 方向の微小立体角から入射する光の放射照度 dE に対する $\mathbf{V}$ 方向の微小立体角への反射光の放射輝度が dL_o の割合

$$f(\mathbf{L},\mathbf{V}) = \frac{dL_o(\mathbf{V})}{dE(\mathbf{L})}$$

$$f(\theta_i,\phi_i,\theta_o,\phi_o) = \frac{dL_o(\theta_o,\phi_o)}{dE(\theta_i,\phi_i)}$$



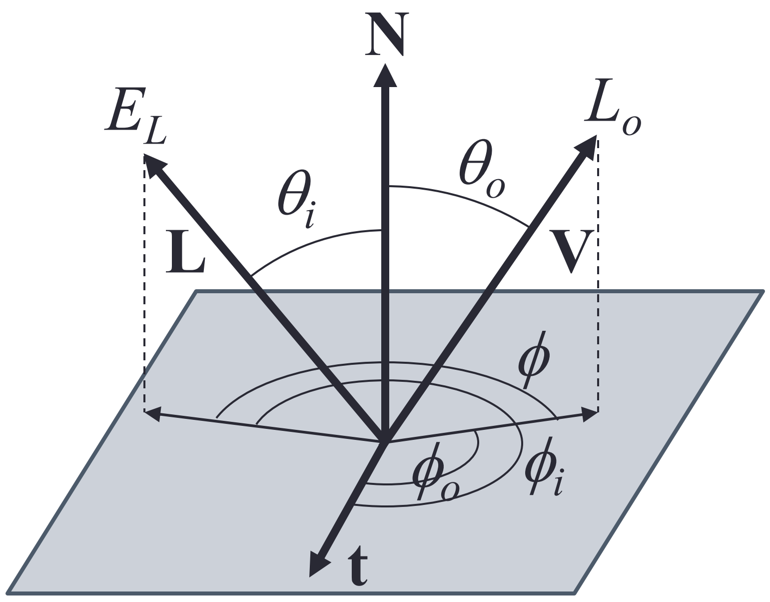
光源が点の場合の BRDF

- 光源が面積を持たない

$$f(\mathbf{L}, \mathbf{V}) = \frac{dL_o(\mathbf{V})}{E_L \overline{\cos}\theta_i}$$

- 複数光源による放射輝度

$$L_o(\mathbf{V}) = \sum_{k=1}^{n} f(\mathbf{L}_k, \mathbf{V}) \otimes E_{L_k} \overline{\cos}\theta_{i_k}$$



E_L ： **L** 方向にある光源の **L** に**直交**する面に対する放射照度

$L_o(\mathbf{v})$ ：反射光の **V** 方向への放射輝度

BRDF の性質

- 光の入射方向と放射方向は，それぞれ２つの自由度を持つ
  - 方位角 ϕ_i, ϕ_o，仰角 θ_i, θ_o
  - したがって，BRDF は４変数の関数
- 入射方向と反射方向を入れ替えても成立する
  - $f(\mathbf{L}, \mathbf{V}) = f(\mathbf{V}, \mathbf{L})$
  - ヘルムホルツの相反性 (Helmholtz reciprocity)
- 等方性 (Isotropic) BRDF
  - 個々の方位角に依存しない
  - 相対的な方位角ϕに依存する
  - ３変数の関数 (θ_i , θ_o , ϕ_o)
- エネルギー保存の法則
  - 放射されるエネルギーは入射エネルギーを超えない

BRDF と二色性反射モデル

- BRDF の拡散反射成分

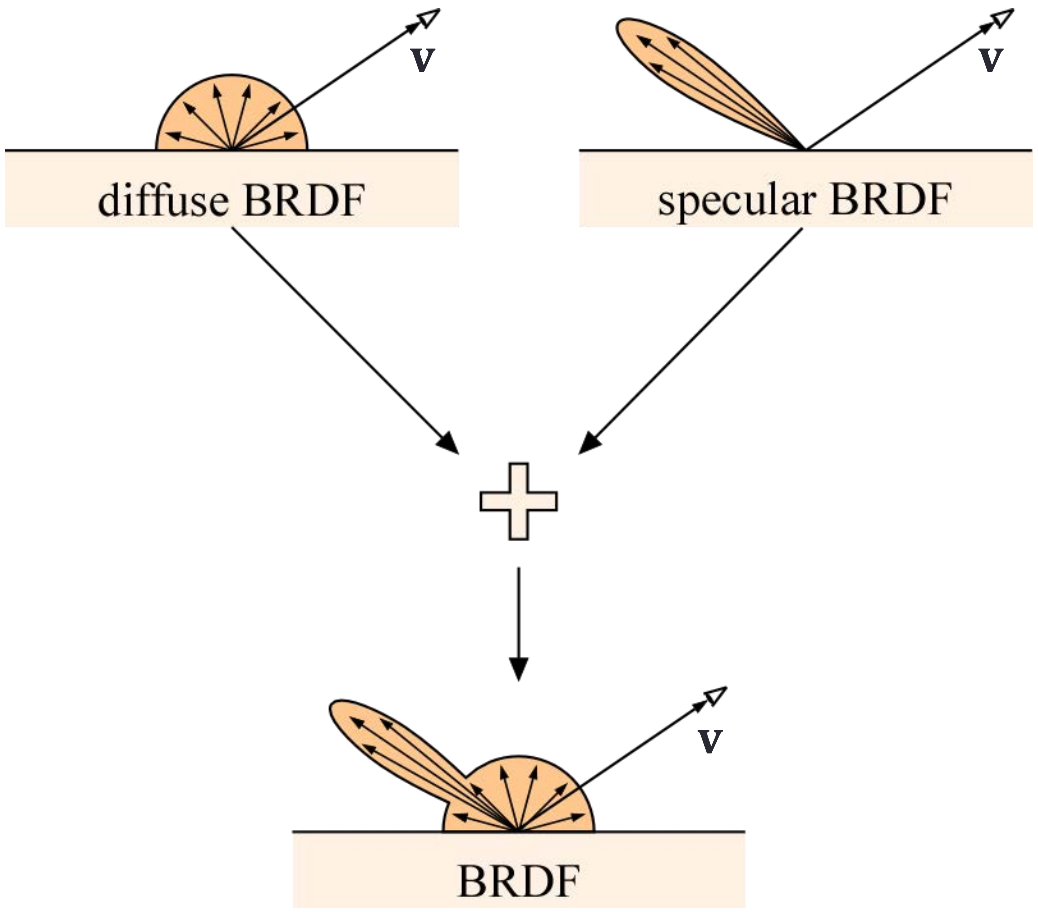
$$f_{diff}(\mathbf{L}, \mathbf{V})$$

- BRDF の鏡面反射成分

$$f_{spec}(\mathbf{L}, \mathbf{V})$$

- BRDF はこれらの和

$$f(\mathbf{L}, \mathbf{V}) = f_{diff}(\mathbf{L}, \mathbf{V}) + f_{spec}(\mathbf{L}, \mathbf{V})$$



指向性半球反射率

- Directional-Hemispherical Reflectance
  - **L** 方向から入射した光の量に対する入射点を中心とする半球に放射される光の量の割合

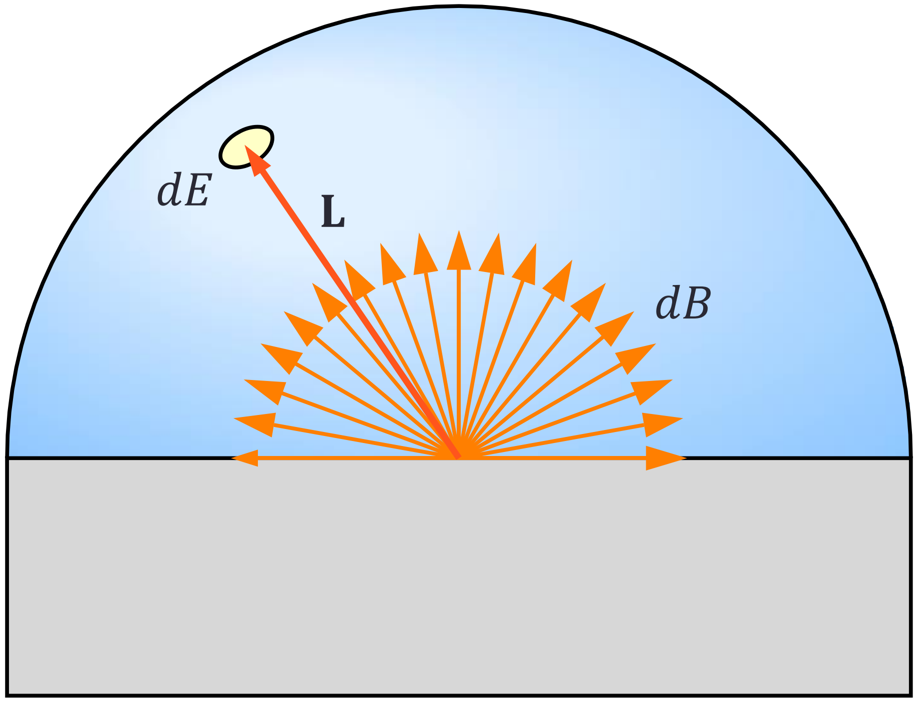
$$R(\mathbf{L}) = \frac{dB}{dE(\mathbf{L})}, \quad 0 \le R(\mathbf{L}) \le 1$$

色

  - 光源が面積を持たないとき

$$R(\mathbf{L}) = \frac{M}{E_L \overline{\cos} \theta_i}$$

M : 発散度



指向性半球反射率と BRDF の関係

- BRDF から指向性半球反射率を求める

$$R(\mathbf{L}) = \int_\Omega f_{diff}(\mathbf{L}, \mathbf{V}) \cos\theta_o \, d\omega_o$$

$\mathbf{V}$ (ω_o) には依存しない → $\int_\Omega \cos\theta_o \, d\omega_o = \pi$

- BRDF が完全拡散反射面 (Lambertian)

$$R(\mathbf{L}) = \pi f_{diff}(\mathbf{L}, \mathbf{V})$$

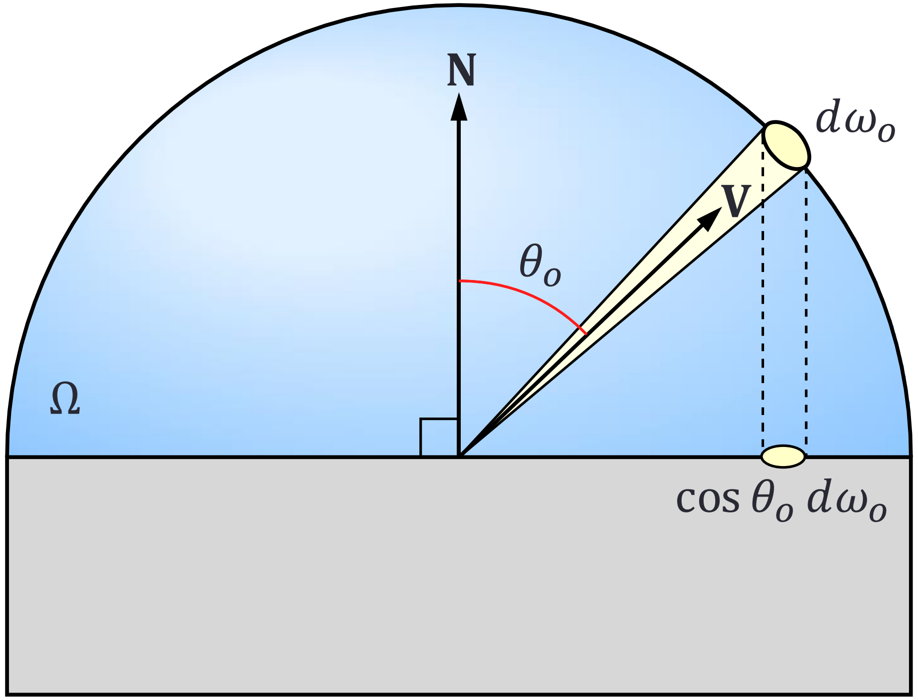
- $R(\mathbf{L})$ は色 c_{diff} なので BRDF の拡散反射成分

$$f_{diff}(\mathbf{L}, \mathbf{V}) = \frac{c_{diff}}{\pi}$$

K_{diff}

- この場合の放射輝度

$$L_o(\mathbf{V}) = \frac{c_{diff}}{\pi} \otimes \sum_{k=1}^{n} E_{L_k} \overline{\cos}\,\theta_{i_k}$$



Phong のモデルの BRDF

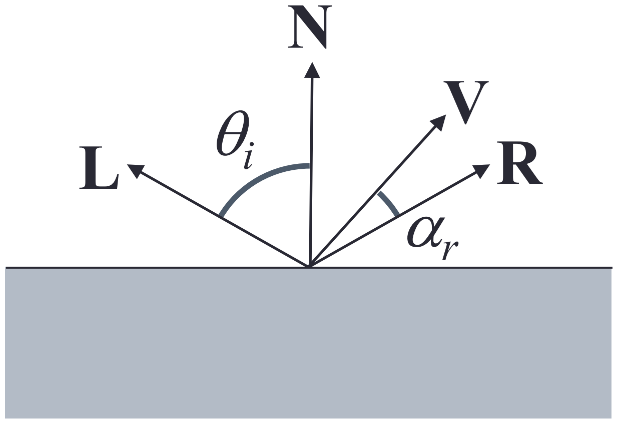
- Phong の陰影付けモデル

$$L_o(\mathbf{V}) = \left(c_{diff}\,\overline{\cos}\,\theta_i + c_{spec}\,\overline{\cos}^m\,\alpha_r\right) \otimes B_L$$

- $E_L = B_L/\pi$とみなして上式から BRDF の項を取り出すと

$$f(\mathbf{L},\mathbf{V}) = \frac{c_{diff}}{\pi} + \frac{c_{spec}\,\overline{\cos}^m\,\alpha_r}{\pi\,\overline{\cos}\,\theta_i}$$

これが Phong の陰影付モデルに
（暗黙的に）採用されていた BRDF



Phong のモデルの BRDF の特性

- c_{diff}
  - 指向性半球反射率により求まる
  - 0～1 の値を持つ
- c_{spec}
  - 0～1 の値を持つ
  - 指向性半球反射率 R_{diff} の値に上限はない

$$f(\mathbf{L},\mathbf{V}) = \frac{c_{diff}}{\pi} + \frac{c_{spec}\,\overline{\cos}^m\,\alpha_r}{\pi\,\boxed{\overline{\cos}\,\theta_i}}$$

  - 上式で入射角 $\theta_i\ \rightarrow\ 90°$ とすると鏡面反射率が大きくなりすぎる

鏡面反射項の指向性半球反射率

- 入射角 $\theta_i \rightarrow 0°$ のとき最大値 $2c_{spec}/(m+2)$
  - $2/(m+2)$ で割る → c_{spec} が指向性半球反射率の最大値に等しくなる

$$f(\mathbf{L},\mathbf{V}) = \frac{c_{diff}}{\pi} + \frac{m+2}{2\pi} c_{spec} \overline{\cos}^m \underline{\alpha_r}$$

- エネルギー保存の法則

$$c_{diff} + c_{spec} \leq 1$$

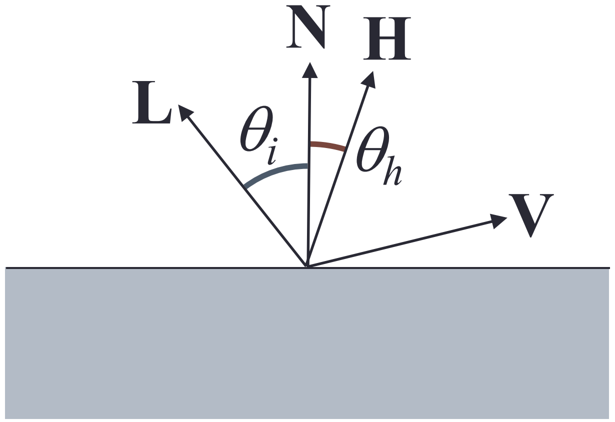
中間ベクトルを用いた場合

- Sloan と Hoffman
  - Blinn-Phong BRDF (1977) を正規化 (2008)

$$f(\mathbf{L},\mathbf{V}) = \frac{c_{diff}}{\pi} + c_{spec}\frac{m+8}{8\pi}\overline{\cos}^m\,\underline{\theta_h}$$

- これは微小面 BRDF（後述）に似ている
  - c_{spec} はフレネル反射率（後述） $R_F(\theta_i)$ に置き換える

$$f(\mathbf{L},\mathbf{V}) = \frac{c_{diff}}{\pi} + R_F(\theta_i)\frac{m+8}{8\pi}\overline{\cos}^m\,\theta_h$$



  - この $\{(m+8)/8\pi\}\overline{\cos}^m\,\theta_h$ の項は微小面 BRDF の法線分布関数に相当する

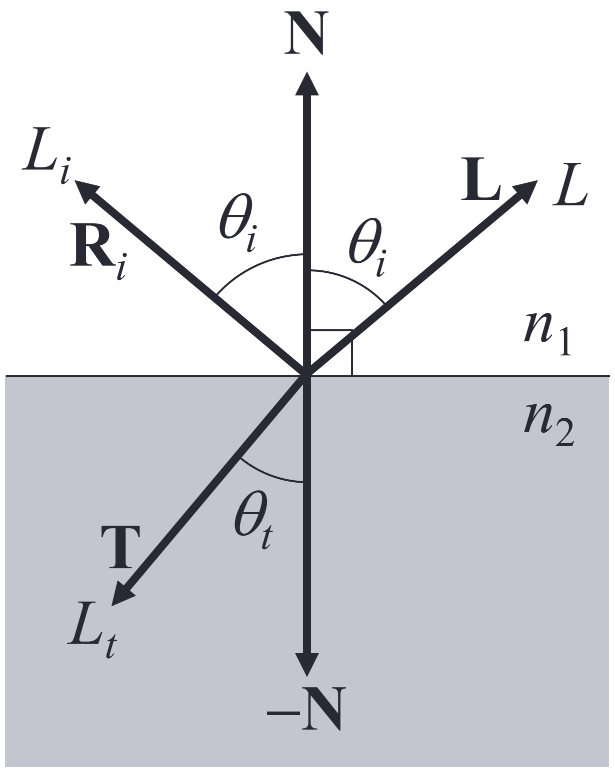
フレネル反射

表面反射と本体反射の配分

表面反射と本体反射

- 表面反射 (Surface reflection)
  - 物体の内部に進入せずに表面で発生する反射
  - 鏡面反射
- 本体反射 (Body reflection)
  - 物体内部に進入した光が散乱して外部に再放出されることにより発生する反射
  - 拡散反射
- 反射の仕方による分類 → 反射する場所による分類

フレネル反射 (Fresnel Reflectance)



$$L_i = \boxed{R_F(\theta_i)} L$$

フレネル反射率

$$L_t = \boxed{(1 - R_F(\theta_i))} \frac{\sin^2\theta_i}{\sin^2\theta_t} L$$

屈折に回る割合

スネルの法則 $n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t$

$$L_t = (1 - R_F(\theta_i)) \frac{{n_2}^2\theta_i}{{n_1}^2\theta_t} L$$

正反射方向 $\mathbf{R}_i = 2(\mathbf{N}\cdot\mathbf{L})\mathbf{N} - \mathbf{L}$

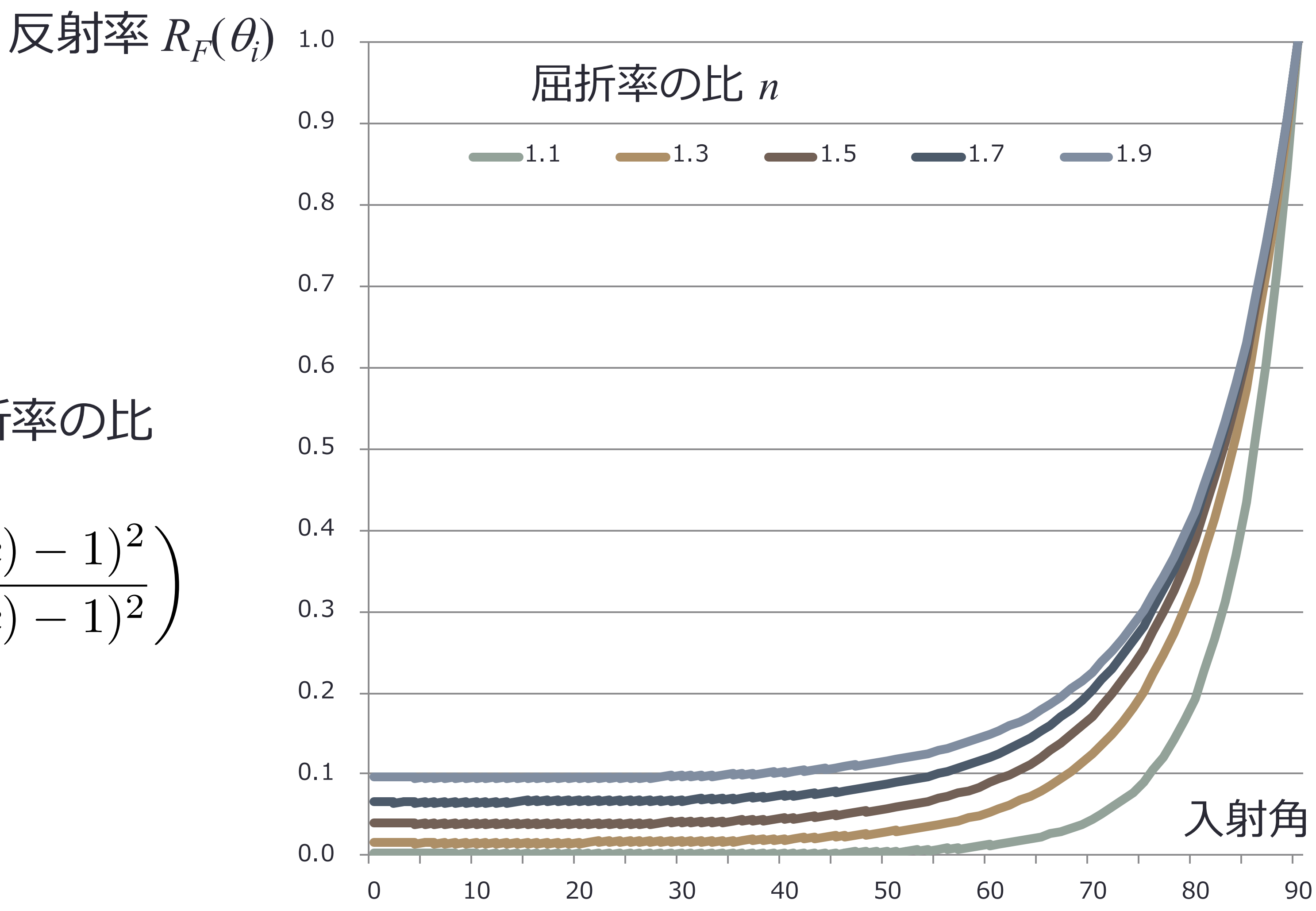
フレネルの式

$$c = \cos\theta_i$$

$$g = \sqrt{n^2 + c^2 + 1}$$

n: 屈折率の比

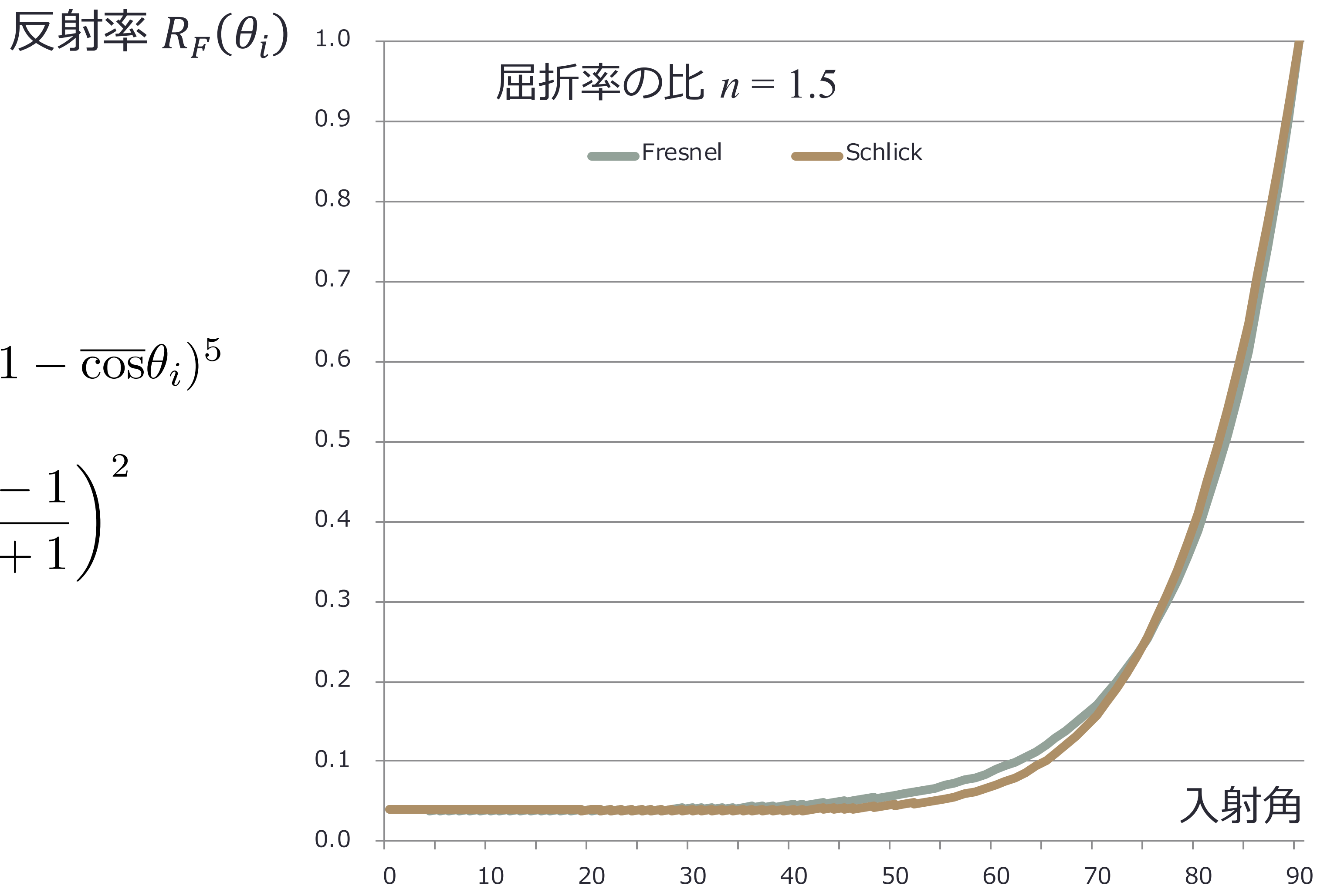
$$R_F(\theta_i) = \frac{1}{2}\frac{(g-c)^2}{(g+c)^2}\left(1 + \frac{(c(g+c)-1)^2}{(c(g-c)-1)^2}\right)$$



Schlick の近似

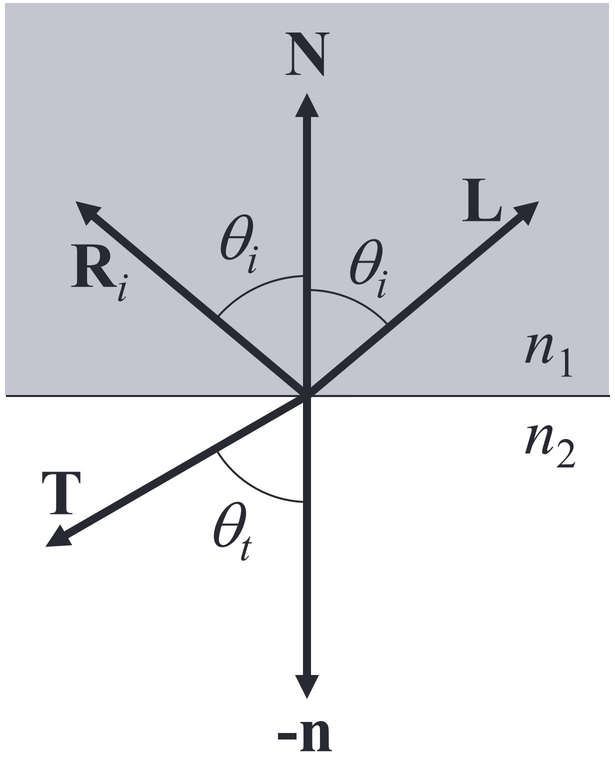
$$R_F(\theta_i) \approx R_F(0°) + (1 - R_F(0°))(1 - \overline{\cos}\theta_i)^5$$

$$n_1 \to 1,\ n_2 \to n \Rightarrow R_F(0°) = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$$



内部反射 (Internal Reflection)

- 光が透明な物体の内部から外部に出る時



$$n_1 > n_2$$
$$\sin\theta_t > \sin\theta_i$$

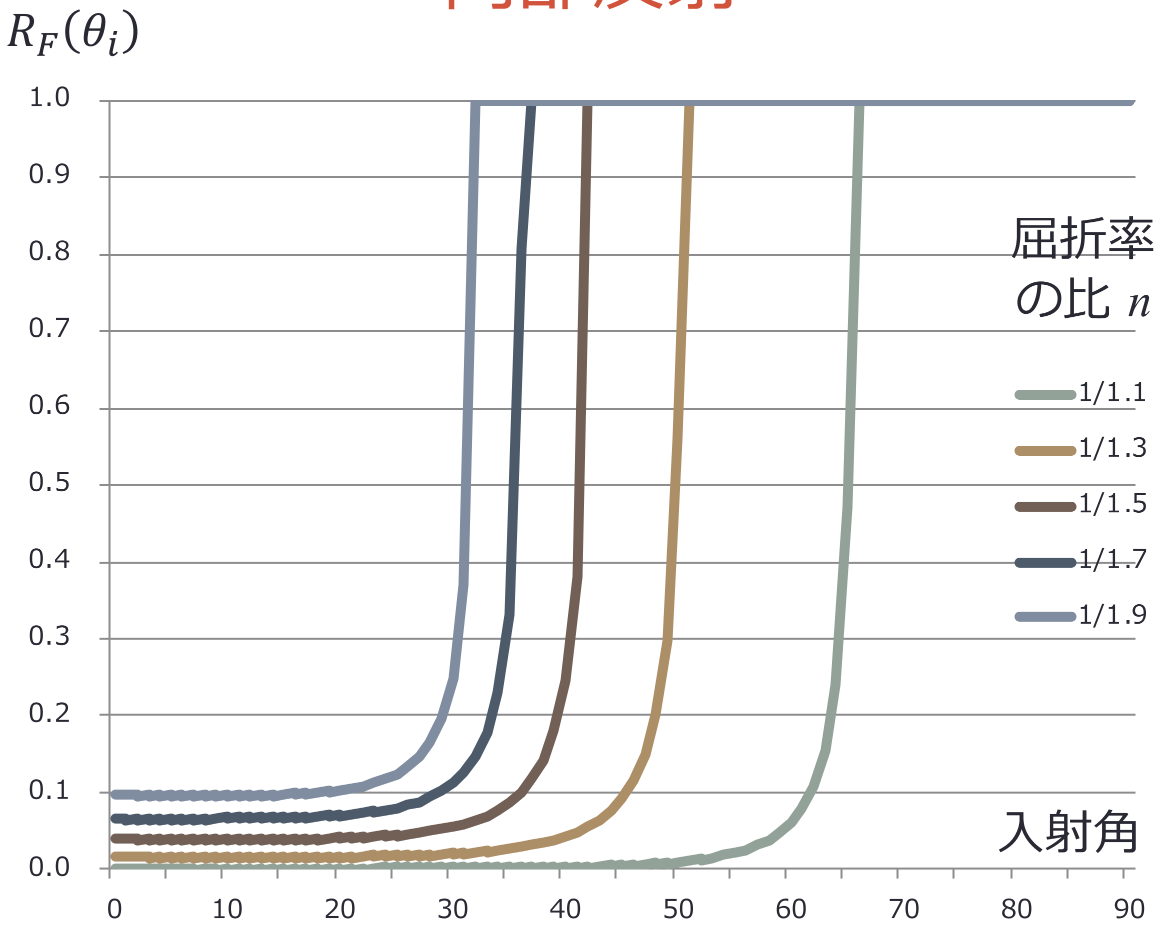
光ファイバが光を漏らさない理由

入射角 θ_i が臨界角 θ_c を超えると
反射率 $R_F(\theta_i) = 1$ となる

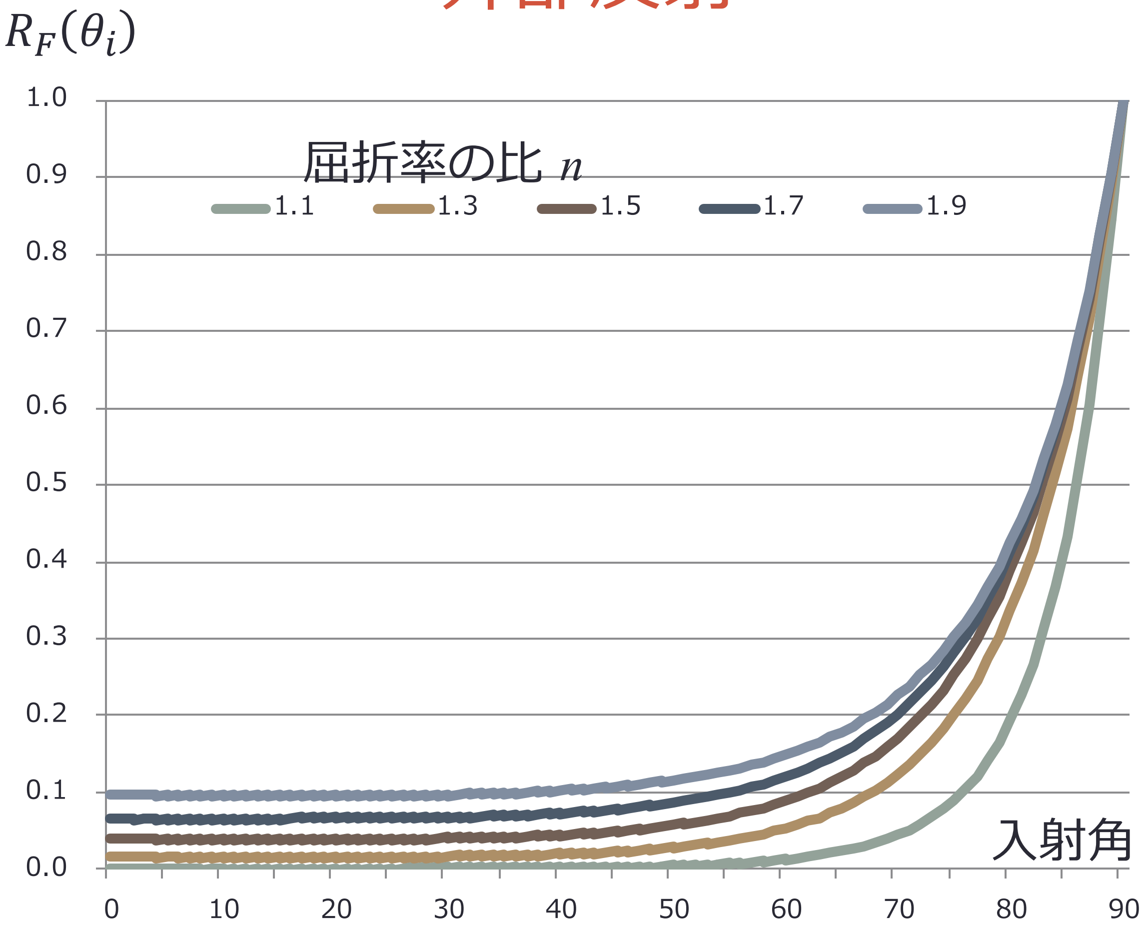
$$\sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1-\sqrt{R_F(0^\circ)}}{1+\sqrt{R_F(0^\circ)}}$$

内部反射と外部反射の反射率

内部反射



外部反射



拡散 BRDF 項はフレネル反射率に依存する

$$f_{diff}(\mathbf{L},\mathbf{V}) = \frac{c_{diff}}{\pi}$$

ρ: 散乱アルベド (albedo, **反射能**)，本当の入射光強度に対する反射光強度の比

$$c_{diff} = (1 - c_{spec})\rho$$

拡散反射色は入射光から鏡面反射色を引いたものに散乱アルベドをかけたもの

$$f_{diff}(\mathbf{L},\mathbf{V}) = (1 - R_F(\theta_i))\frac{\rho}{\pi}$$

拡散反射色はフレネルの法則と散乱アルベドで決まる

Shirley の式

$$f_{diff}(\mathbf{L},\mathbf{V}) = \frac{21}{20\pi(1 - R_F(0^\circ))}(1 - (1 - \overline{\cos}\theta_i)^5)(1 - (1 - \overline{\cos}\theta_o)^5)\rho$$

Ashikhmin と Shirley の式

$$f_{diff}(\mathbf{L},\mathbf{V}) = \kappa_{norm}(1 - R_{spec}(\mathbf{L}))(1 - R_{spec}(\mathbf{V}))\rho$$

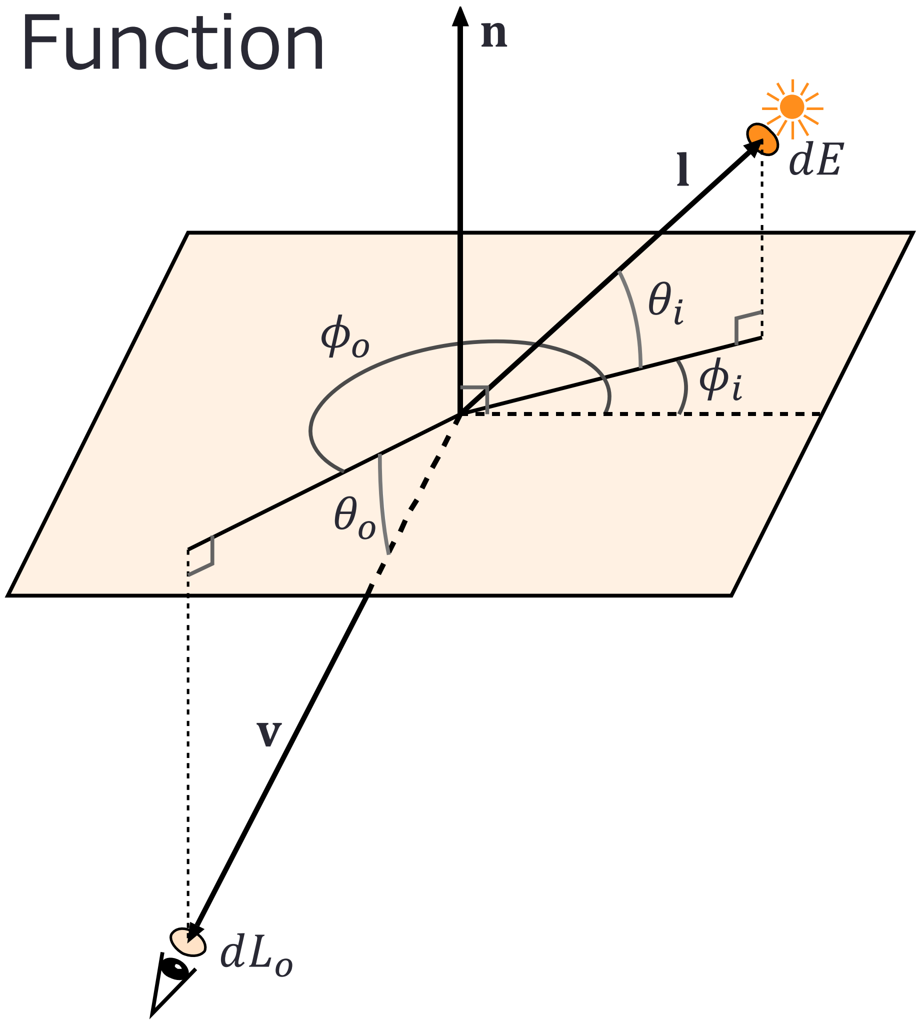
κ_{norm} はエネルギー保存を保証することにより決まる定数

BTDF

- Bidirectional Transmittance Distribution Function
  - 双方向透過率分布関数
- $\mathbf{l}$ 方向の微小立体角から入射する光の放射照度 dE に対する $\mathbf{v}$ 方向の微小立体角への反射光の放射輝度が dL_o の割合

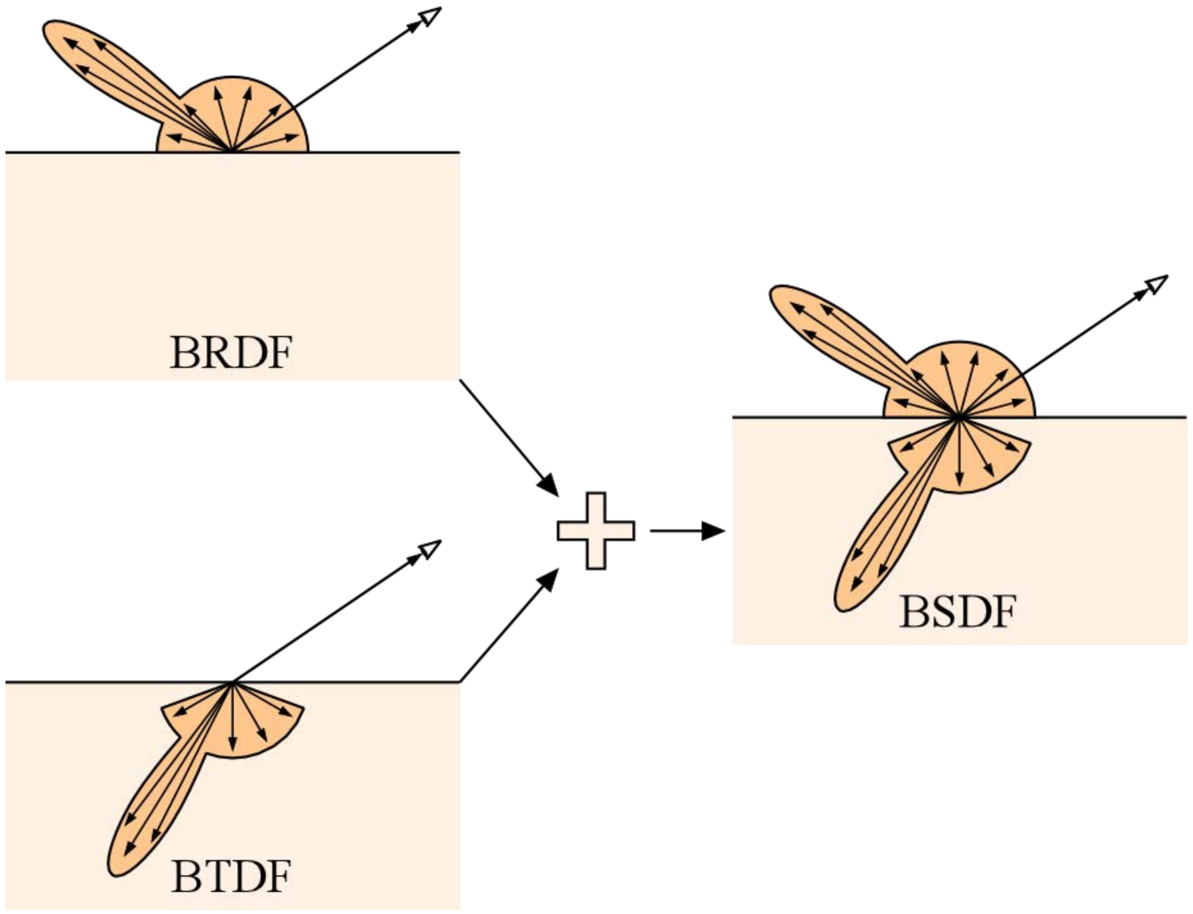
$$f(\mathbf{l},\mathbf{v}) = \frac{dL_o(\mathbf{v})}{dE(\mathbf{l})}$$

$$f(\theta_i,\phi_i,\theta_o,\phi_o) = \frac{dL_o(\theta_o,\phi_o)}{dE(\theta_i,\phi_i)}$$



BSDF

- Bidirectional Scattering Distribution Function
  - 双方向散乱分布関数
- BRDF
  - 物体外部から物体表面に当たる光の反射率
- BTDF
  - 物体内部から物体表面に当たる光の透過率
- BSDF
  - BRDF と BTDF を合わせたもの

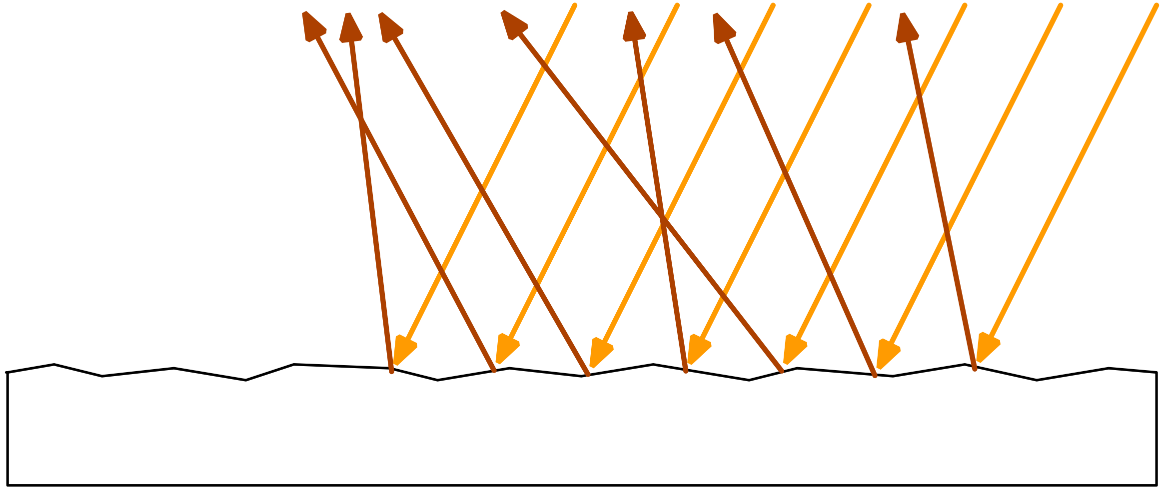


微小面モデル

表面の粗さの影響

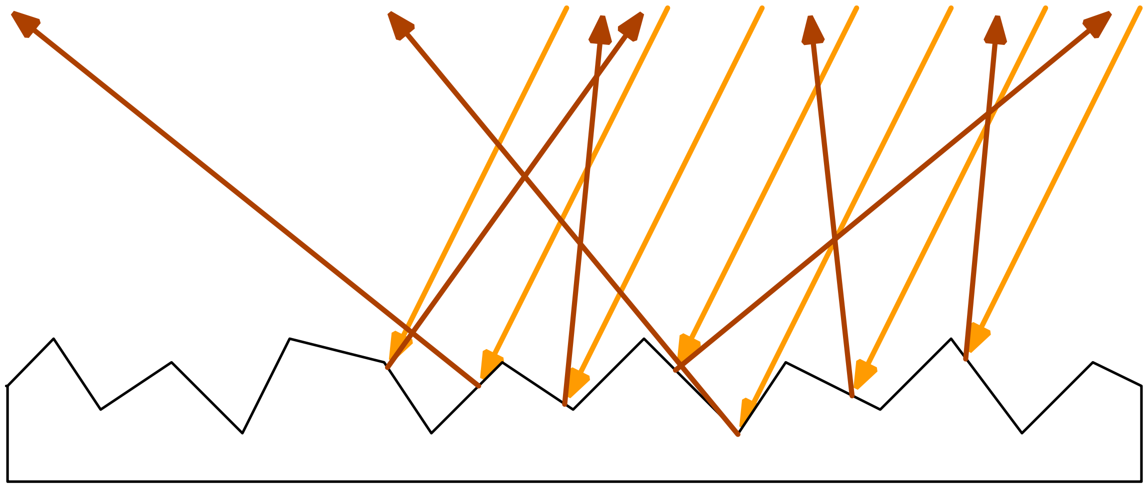
微小形状 (Micro geometry)

面の粗さが小さいとき



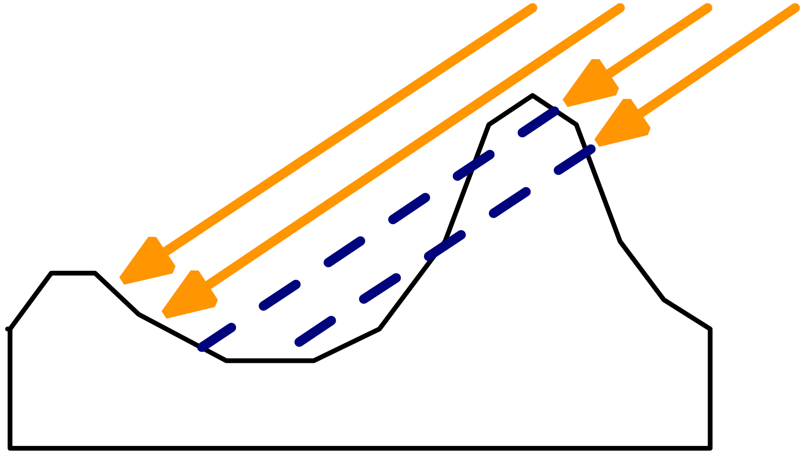
反射光の散らばりが少ない

面の粗さが大きいとき



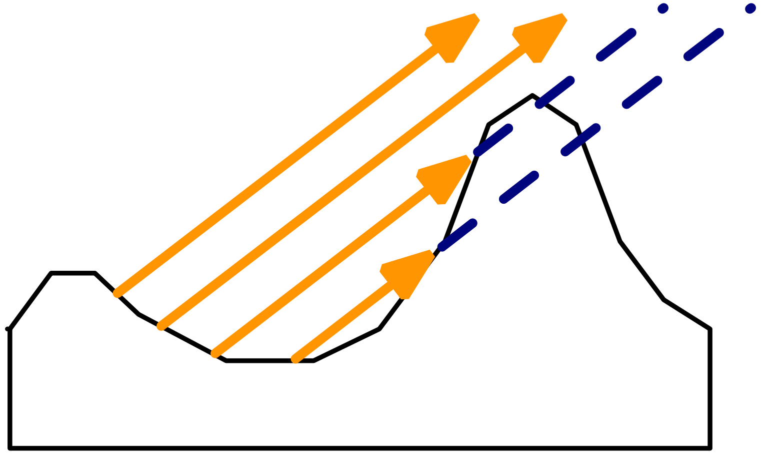
反射光の散らばりが大きい

微小形状による効果



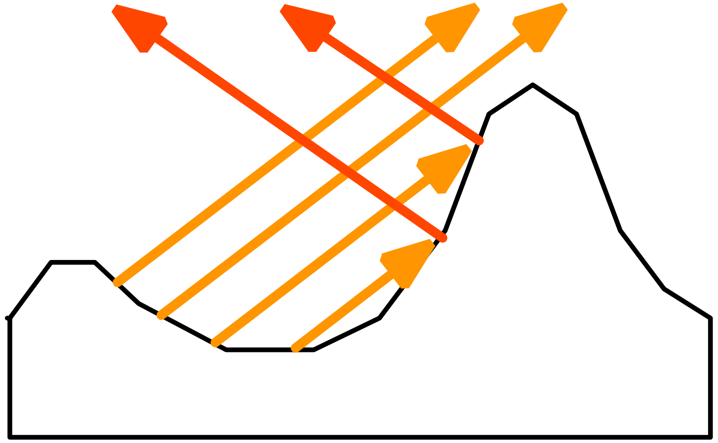
シャドウィング

微小形状によって入射光の影が発生する



マスキング

微小形状によって反射光がさえぎられる

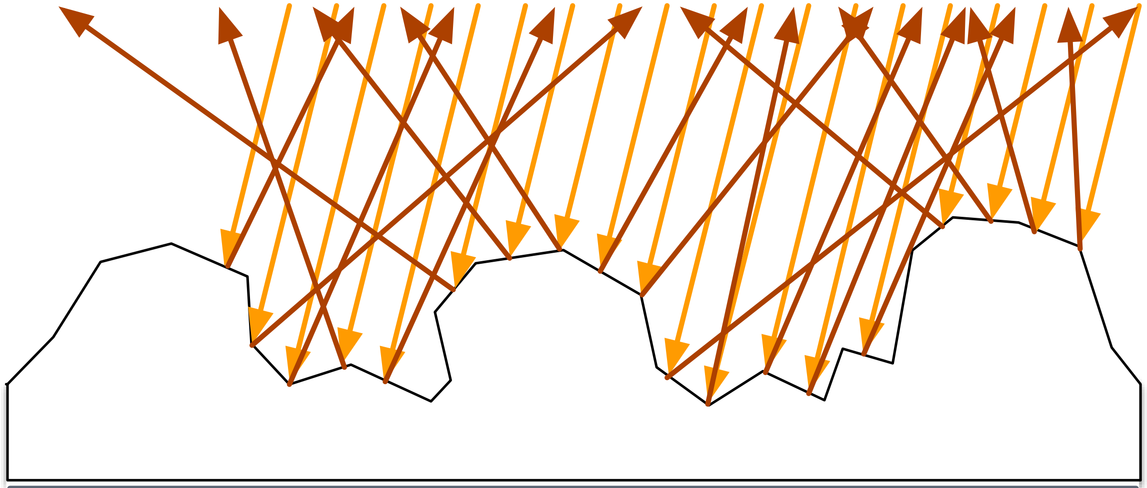


相互反射

微小形状の内部で相互反射が発生する

微小形状の高さと法線ベクトル

光の入射角が深いとき

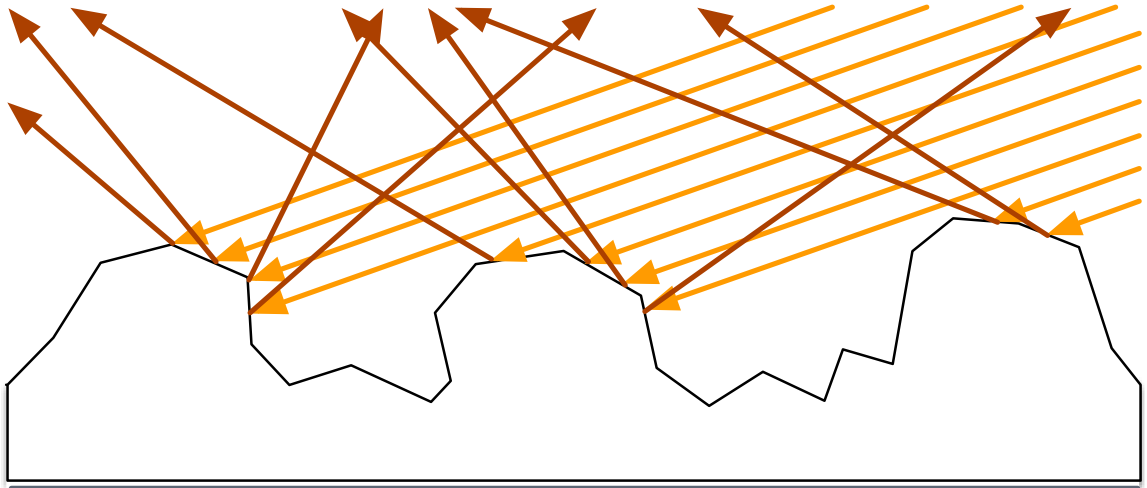


粗い深い部分まで光が届く

↓

反射光の散らばりが大きい
（鏡面反射が弱い）

光の入射角が浅いとき



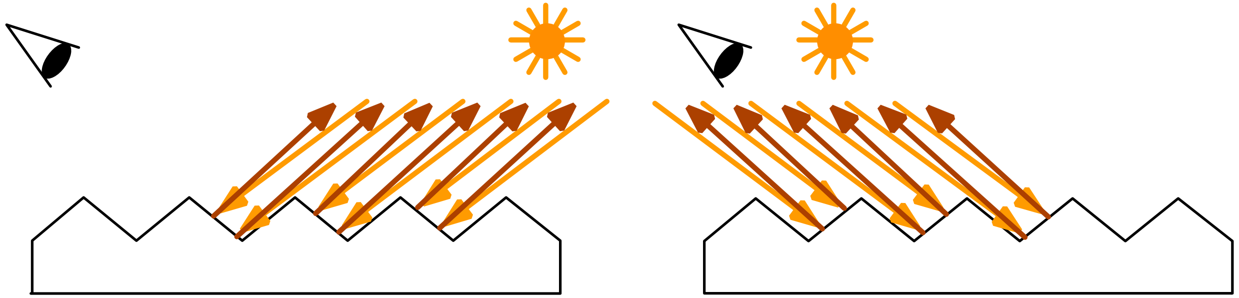
滑らかな浅い部分にしか光が届かない

↓

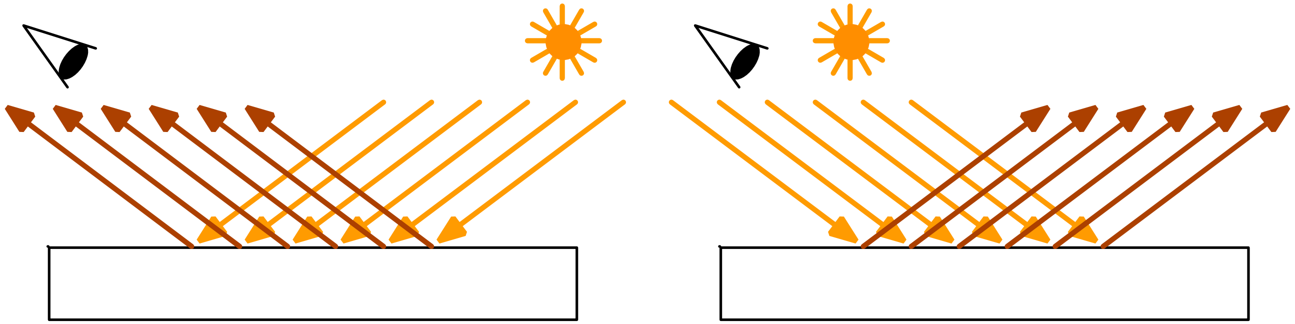
反射光の散らばりは小さい
（鏡面反射が強い）

再帰性反射 (Retro-reflection)

- 光の入射方向が視線と一致するときに最も明るくなる現象



- 滑らかな表面では入射光の正反射方向が最も明るくなる

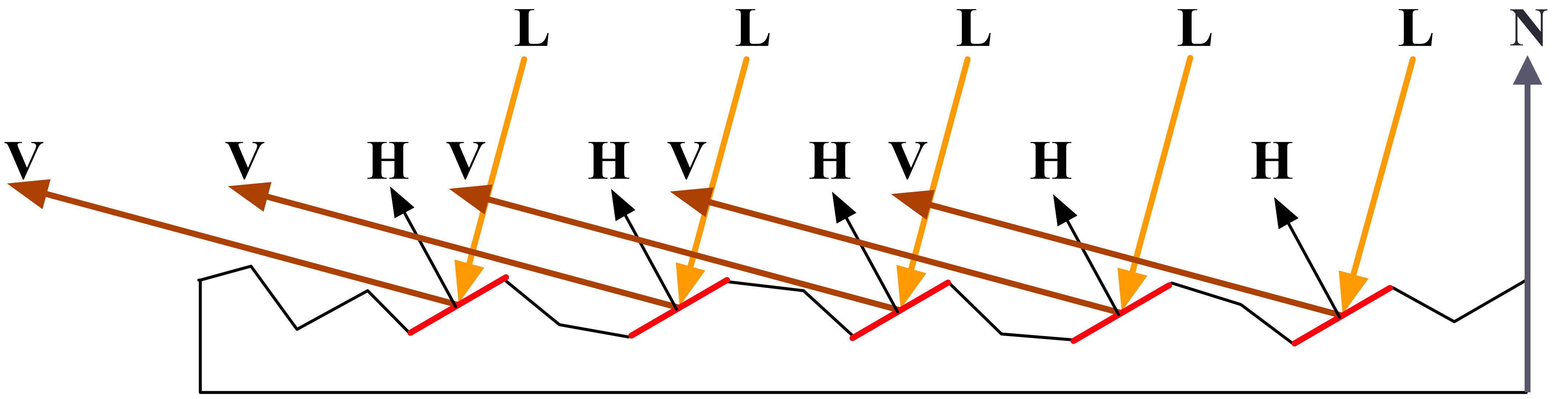


微小面理論 (Microfacet Theory)

- Torrance and Sparrow [1967]
  - Torrance, Kenneth E., and Ephraim M. Sparrow. "Theory for off-specular reflection from roughened surfaces." *JOSA* 57.9 (1967): 1105-1114.
- Blinn [1977]
  - Blinn, James F. "Models of light reflection for computer synthesized pictures." *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*. Vol. 11. No. 2. ACM, 1977.
- Cook and Torrance [1981]
  - Cook, Robert L., and Kenneth E. Torrance. "A reflectance model for computer graphics." *ACM Siggraph Computer Graphics*. Vol. 15. No. 3. ACM, 1981.

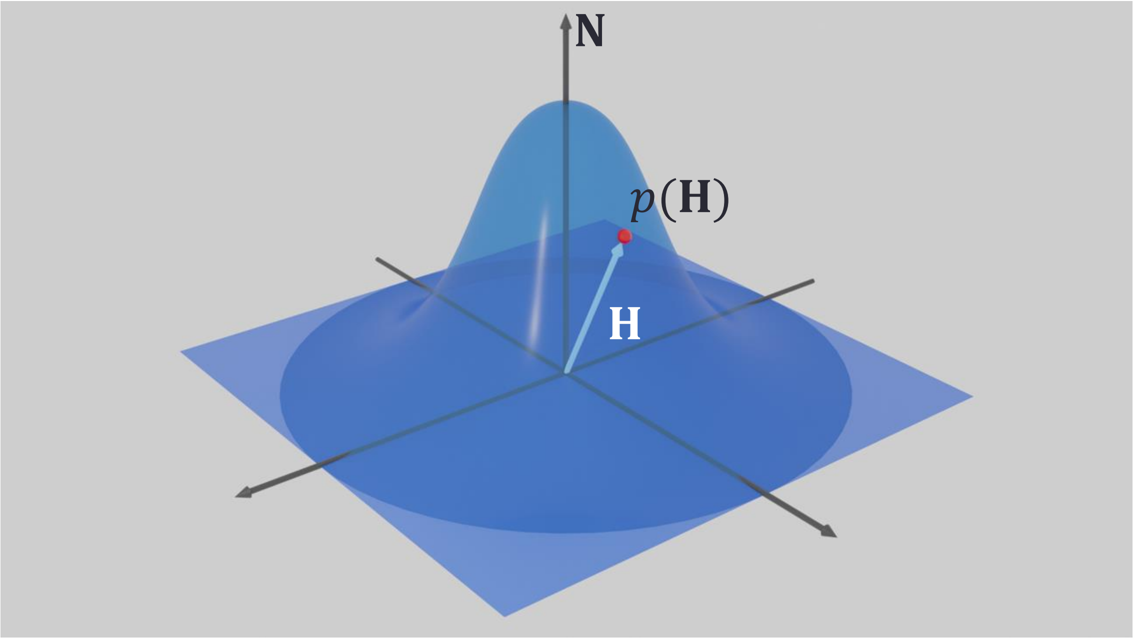
微小面モデル

- 物体表面が光を正反射する微小面の集まりでできていると考える
  - 反射率は微小面が光源方向 $\mathbf{L}$ から入射する光を視点方向 $\mathbf{V}$ に正反射する方向 $\mathbf{H}$ を向いている確率 $p(\mathbf{H})$ に比例する
  - $\mathbf{H}$ は $\mathbf{L}$ と $\mathbf{V}$ の中間ベクトル



表面の粗さの微小面によるモデル化

- 表面の微小形状を微小面の集合として扱う
  - 微小面は平坦なフレネル反射する鏡であるとする
  - 表面特性は微小面の法線の分布 $p(\mathbf{H})$ で決まる
- **法線分布関数** (normal distribution function, NDF)

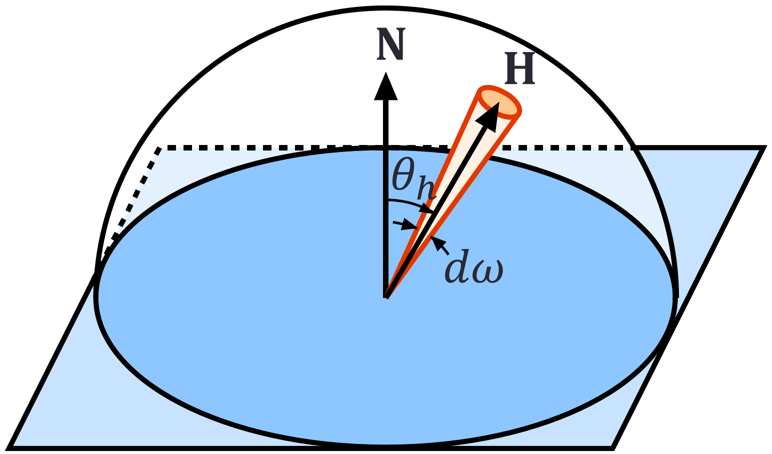


微小面の法線が特定方向に向く確率

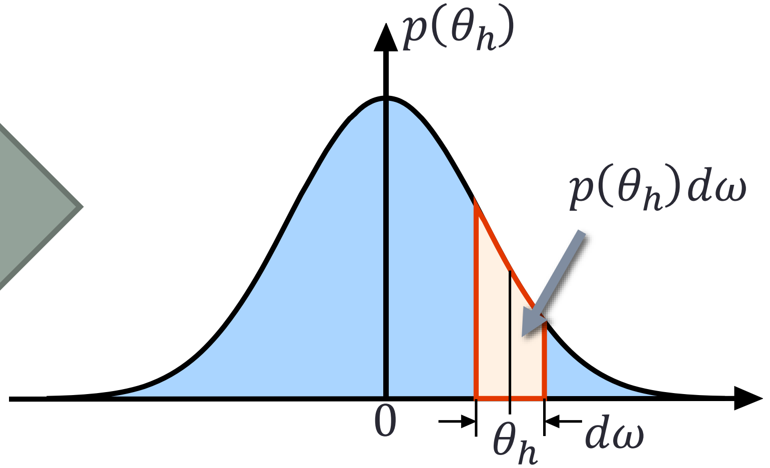
- 微小面の法線ベクトルが視線と光線の中間ベクトル $\mathbf{H}$ 方向の立体角 $d\omega$ の範囲を向いている**確率**

$$p(\mathbf{H})d\omega$$

  - $\mathbf{N}$ はこの微小面が乗っている土台の面の法線ベクトル



分布が等方性なら
$\mathbf{N}\cdot\mathbf{H}=\cos\theta_h$



法線分布関数 (normal distribution function, NDF)

- 正規化された Blinn-Phong モデル

$$p(\theta_h) = \frac{m+8}{8\pi} \cos^m \theta_h$$

余弦の
べき乗

- Torrance-Sparrow モデル

$$p(\theta_h) = b e^{-c^2 {\theta_h}^2}$$

正規分布

- Cook-Torrance モデル

$$p(\theta_h) = \frac{1}{4m^2 \cos^4 \theta_h} e^{-\frac{\tan^2 \theta_h}{m^2}} = \frac{1}{4m^2 \cos^4 \theta_h} e^{\frac{\cos^2 \theta_h - 1}{m^2 \cos^2 \theta_h}}$$

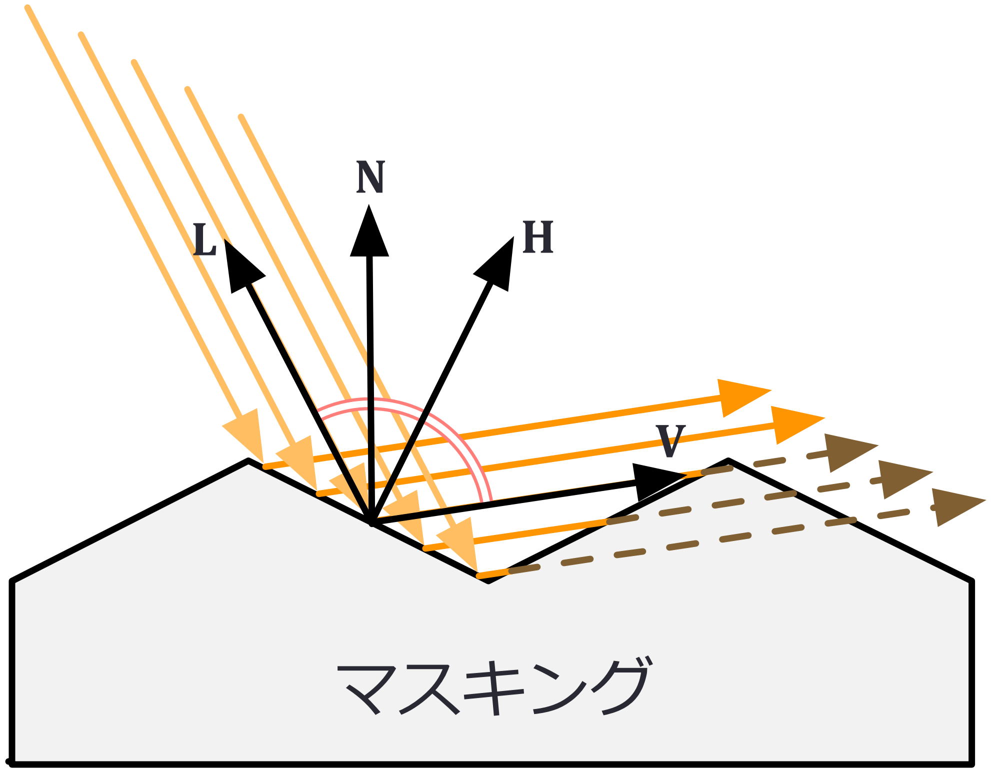
Beckmann
分布

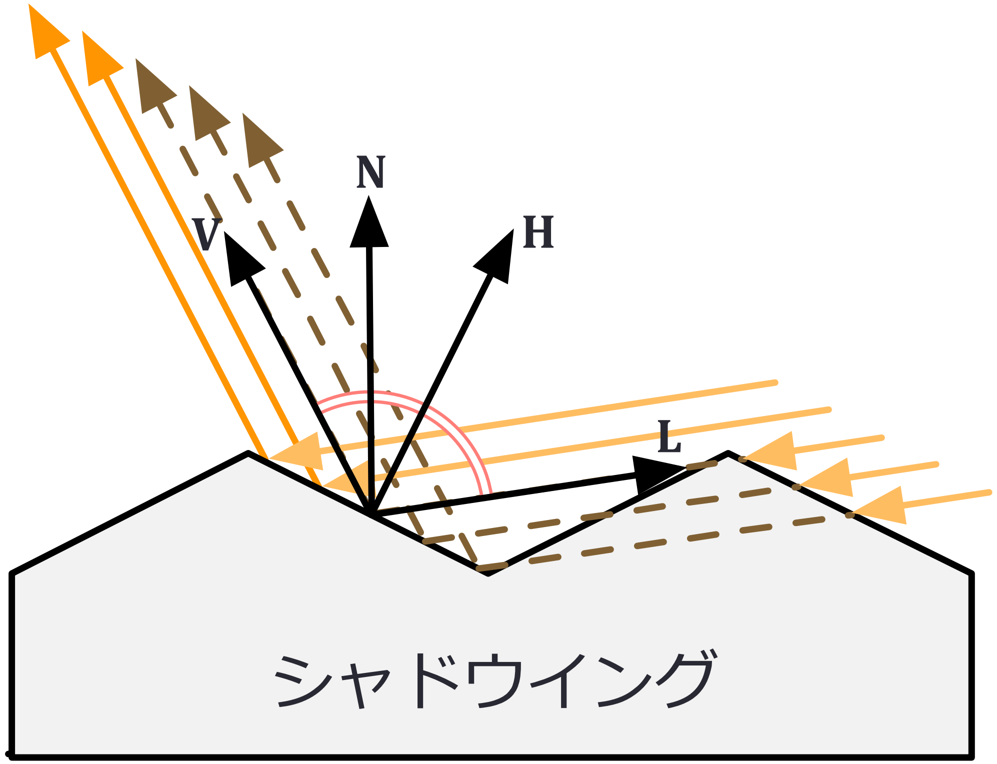
- Walter モデル

$$p(\theta_h) = \frac{m^2}{\pi\{1 + \cos^2 \theta_h \,(m^2 - 1)\}}$$

Trowbridge-
Reitz 分布
(**GGX**)

幾何減衰係数 (Geometric Attenuation Factor, GAF)



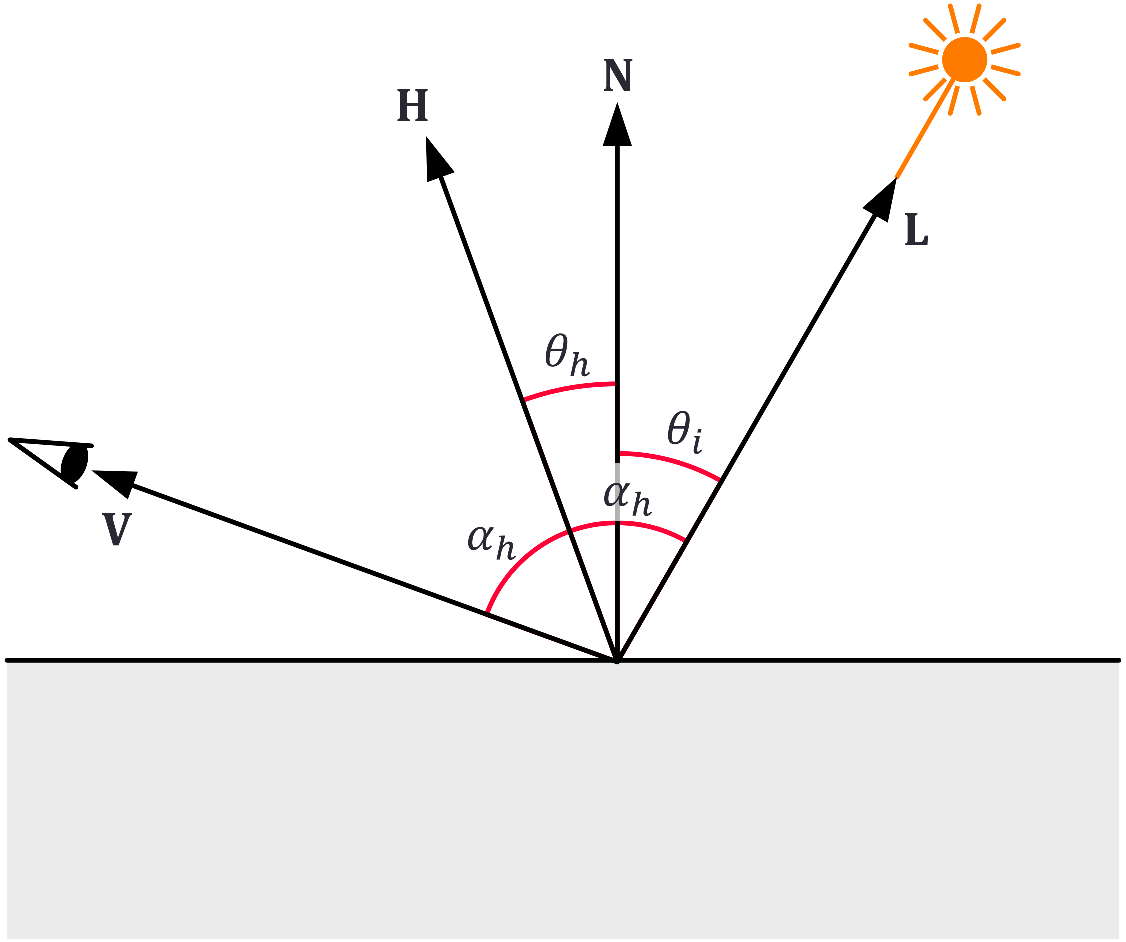


$$G(\mathbf{L},\mathbf{V}) = \min\left\{1, \frac{2(\mathbf{N}\cdot\mathbf{H})(\mathbf{N}\cdot\mathbf{L})}{\mathbf{H}\cdot\mathbf{L}}, \frac{2(\mathbf{N}\cdot\mathbf{H})(\mathbf{N}\cdot\mathbf{V})}{\mathbf{H}\cdot\mathbf{L}}\right\}$$

凹凸を三角形でモデル化した場合

中間ベクトルにもとづくフレネル反射率 $R_F(\alpha_h)$

- 鏡面反射光と拡散反射光の配分比
- α_h：**L**または**V**と**H**のなす角
- $R_F(\theta_i)$：フレネル反射率
  - $c = \cos\theta_i$
  - $g = \sqrt{n^2 + c^2 + 1}$
  - $R_F(\theta_i) = \frac{1}{2}\frac{(g-c)^2}{(g+c)^2}\left(1 + \frac{(c(g+c)-1)^2}{(c(g-c)-1)^2}\right)$
- Schlick によるフレネル反射率の近似
  - $R_F(\alpha_h) \approx R_F(0^\circ) + \left(1 - R_F(0^\circ)\right)(1 - \cos\alpha_h)^5$



微小面理論にもとづく BRDF

$$f(\mathbf{L},\mathbf{V})=\frac{p(\mathbf{H})G(\mathbf{L},\mathbf{V})R_F(\alpha_h)}{4k_p\,\overline{\cos}\,\theta_i\,\overline{\cos}\,\theta_o}$$

$$k_p=\int_\Omega p(\mathbf{H})\cos\theta_h\,d\omega_h$$

通常 $p(\mathbf{H})$ は土台の法線ベクトル $\mathbf{N}$ に対して対称（等方性をもつ）

$$f(\mathbf{L},\mathbf{V})=\frac{p(\theta_h)G(\mathbf{L},\mathbf{V})R_F(\alpha_h)}{4k_p\,\overline{\cos}\,\theta_i\,\overline{\cos}\,\theta_o}$$

Torrance and Sparrow の BRDF

- 幾何減衰係数

$$G_{TS}(\mathbf{L},\mathbf{V}) = \min\left(1, \frac{\overline{\cos}\theta_h\overline{\cos}\theta_o}{\overline{\cos}\alpha_h}, \frac{\overline{\cos}\theta_h\overline{\cos}\theta_i}{\overline{\cos}\alpha_h}\right)$$

- 可視度項 (Visibility Term，後述)

$$\frac{G_{TS}(\mathbf{L},\mathbf{V})}{\overline{\cos}\theta_i\overline{\cos}\theta_o} \approx \frac{2}{1+\mathbf{L}\cdot\mathbf{V}} = \frac{4}{\mathbf{H}'\cdot\mathbf{H}'} = \frac{1}{\cos^2\alpha_h}$$

H' は正規化しない中間ベクトル $(\mathbf{L}+\mathbf{V})$

Smith の幾何減衰係数

- 表面の粗さに依存した 2 つの幾何減衰係数
  - Sancer よって導かれ Stam が diffraction BRDF で用いたもの
    - Sancer, Maurice. "Shadow-corrected electromagnetic scattering from a randomly rough surface." *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 17.5 (1969): 577-585.
  - Smith によって導かれ HTSG BRDF モデルで用いられたもの
    - Smith, Bruce. "Geometrical shadowing of a random rough surface." *IEEE transactions on antennas and propagation* 15.5 (1967): 668-671.
- 両方ともとても複雑で計算コストが高い
  - Schlick によって導かれた Smith のシャドウィング関数の近似

$$G_{Smith}(\mathbf{L}, \mathbf{V}) \approx \left(\frac{\overline{\cos}\theta_i}{\overline{\cos}\theta_i(1-k)+k}\right)\left(\frac{\overline{\cos}\theta_o}{\overline{\cos}\theta_o(1-k)+k}\right) \qquad k = \sqrt{\frac{2m^2}{\pi}}$$

どの幾何減衰係数を選ぶべきか

- 法線分布関数 NDF も幾何減衰係数 GAF も表面の凹凸で決まる
  - したがって NDF と GAF は依存している
  - しかし NDF が同じでも凹凸の形が異なれば GAF が異なる
- Smith の幾何減数係数と Torrance-Sparrow は数学的に妥当である
  - さらに Smith の幾何減衰係数の方がランダムな微小面の振舞いによく一致する
    - Heitz, Eric. "Understanding the masking-shadowing function in microfacet-based BRDFs." *Journal of Computer Graphics Techniques* 3.2 (2014): 32-91.

Phong BRDF の微小面 BRDF

- 微小面理論にもとづく BRDF

$$f(\mathbf{L},\mathbf{V}) = \frac{p(\theta_h)G(\mathbf{L},\mathbf{V})R_F(\alpha_h)}{4k_p\,\overline{\cos}\,\theta_i\,\overline{\cos}\,\theta_o}$$

法線分布関数 $\dfrac{p(\theta_h)}{4k_p}$ ⇨ cos のべき乗関数 $\dfrac{m+8}{8\pi}\overline{\cos}^m\,\theta_h$

$$f(\mathbf{L},\mathbf{V}) = \left(\frac{G(\mathbf{L},\mathbf{V})}{\overline{\cos}\,\theta_i\,\overline{\cos}\,\theta_o}\right)\left(\frac{m+8}{8\pi}\overline{\cos}^m\,\theta_h\right)R_F(\alpha_h)$$

法線分布関数に cos のべき乗関数を用いた BRDF

微小面 BRDF における幾何減衰係数

- 法線分布関数に cos のべき乗関数を用いた BRDF

$$f(\mathbf{L},\mathbf{V}) = \left(\frac{G(\mathbf{L},\mathbf{V})}{\overline{\cos}\,\theta_i\,\overline{\cos}\,\theta_o}\right)\left(\frac{m+8}{8\pi}\overline{\cos}^m\,\theta_h\right)R_F(\alpha_h)$$

- Blinn-Phong BRDF の鏡面反射項

$$f_{spec}(\mathbf{L},\mathbf{V}) = \left(\frac{m+8}{8\pi}\overline{\cos}^m\,\theta_h\right)R_F(\alpha_h)$$

- この比較から Blinn-Phong BRDF の（隠れた）幾何減衰係数 G_{BF} は

$$G_{BF}(\mathbf{L},\mathbf{V}) = \overline{\cos}\,\theta_i\,\overline{\cos}\,\theta_o$$

可視度項 (visibility term)

- 法線分布関数に cos のべき乗関数を用いた BRDF において

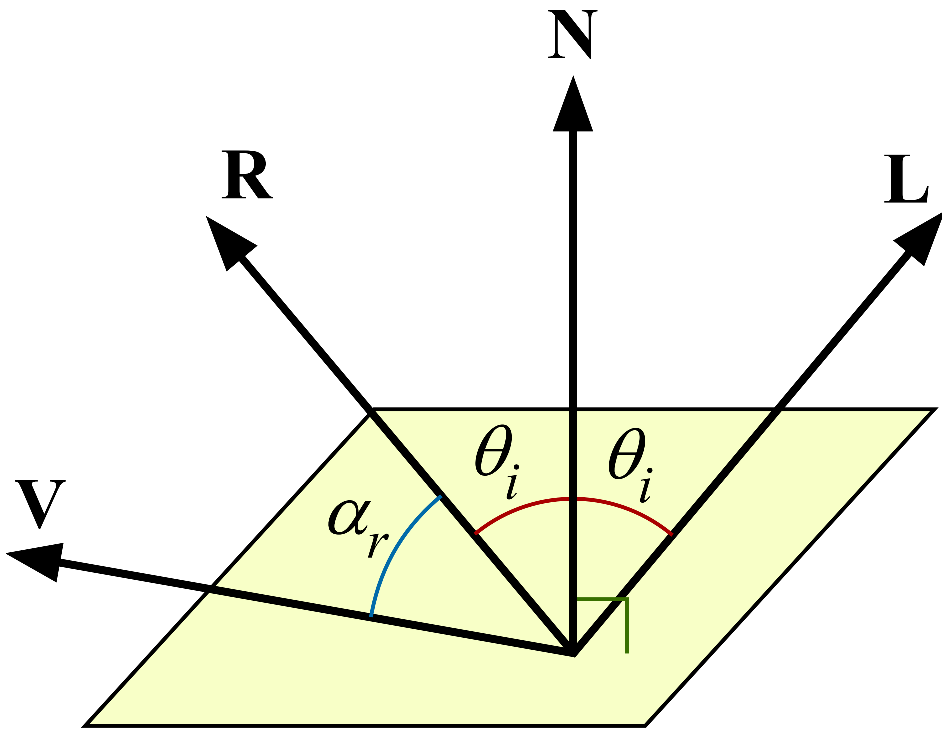
$$f(\mathbf{L},\mathbf{V}) = \underbrace{\boxed{\left(\frac{G(\mathbf{L},\mathbf{V})}{\overline{\cos}\,\theta_i\,\overline{\cos}\,\theta_o}\right)}}_{\text{可視度項}}\left(\frac{m+8}{8\pi}\,\overline{\cos}^m\,\theta_h\right)R_F(\alpha_h)$$

可視度項 (visibility term) のモデル化

Blinn-Phong BRDF の可視度項 これは $G(\mathbf{L},\mathbf{V}) = \overline{\cos}\,\theta_i\,\overline{\cos}\,\theta_o$ とみなせる →浅い角度から見たときに暗すぎる	1
Ward BRDF の可視度項 これは $G(\mathbf{L},\mathbf{V}) = 1$ とみなせる →浅い角度から見たときに明るすぎる	$\dfrac{1}{\overline{\cos}\,\theta_i\,\overline{\cos}\,\theta_o}$
Neumann et al.	$\dfrac{1}{\max(\overline{\cos}\,\theta_i\,,\overline{\cos}\,\theta_o)}$
Ashikhmin and Premože	$\dfrac{1}{\cos\alpha_h\max(\overline{\cos}\,\theta_i\,,\overline{\cos}\,\theta_o)}$ ↓ $\dfrac{1}{\overline{\cos}\,\theta_i + \overline{\cos}\,\theta_o - \overline{\cos}\,\theta_i\,\overline{\cos}\,\theta_o}$

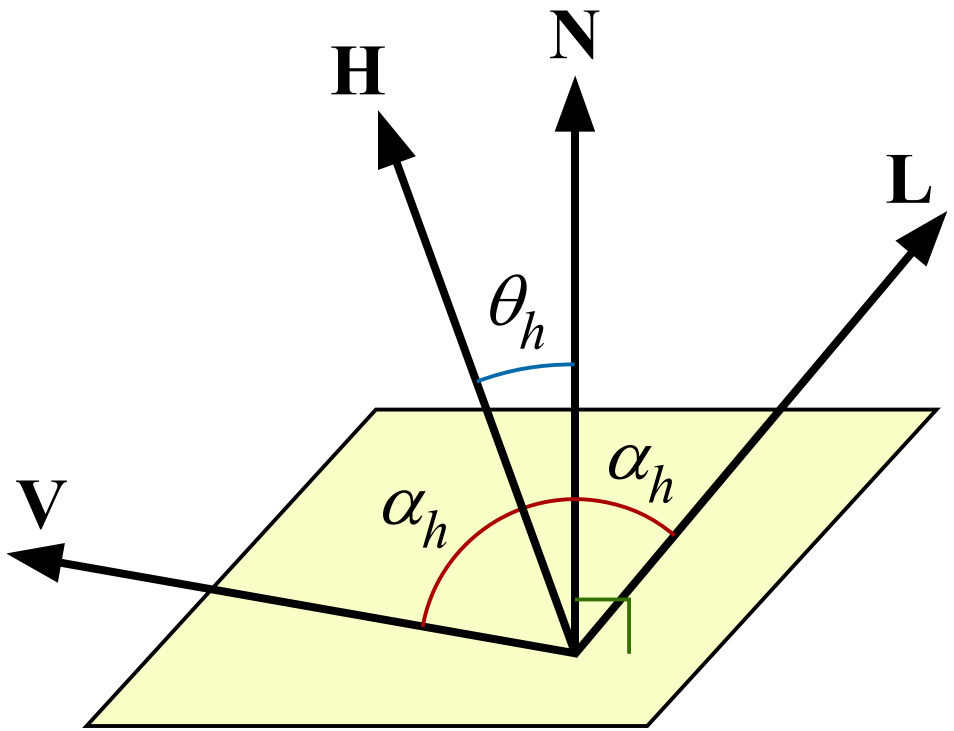
正反射ベクトルか中間ベクトルか

正反射ベクトル



L の反射ベクトル **R** と
視線ベクトル **V** がなす角 α_r

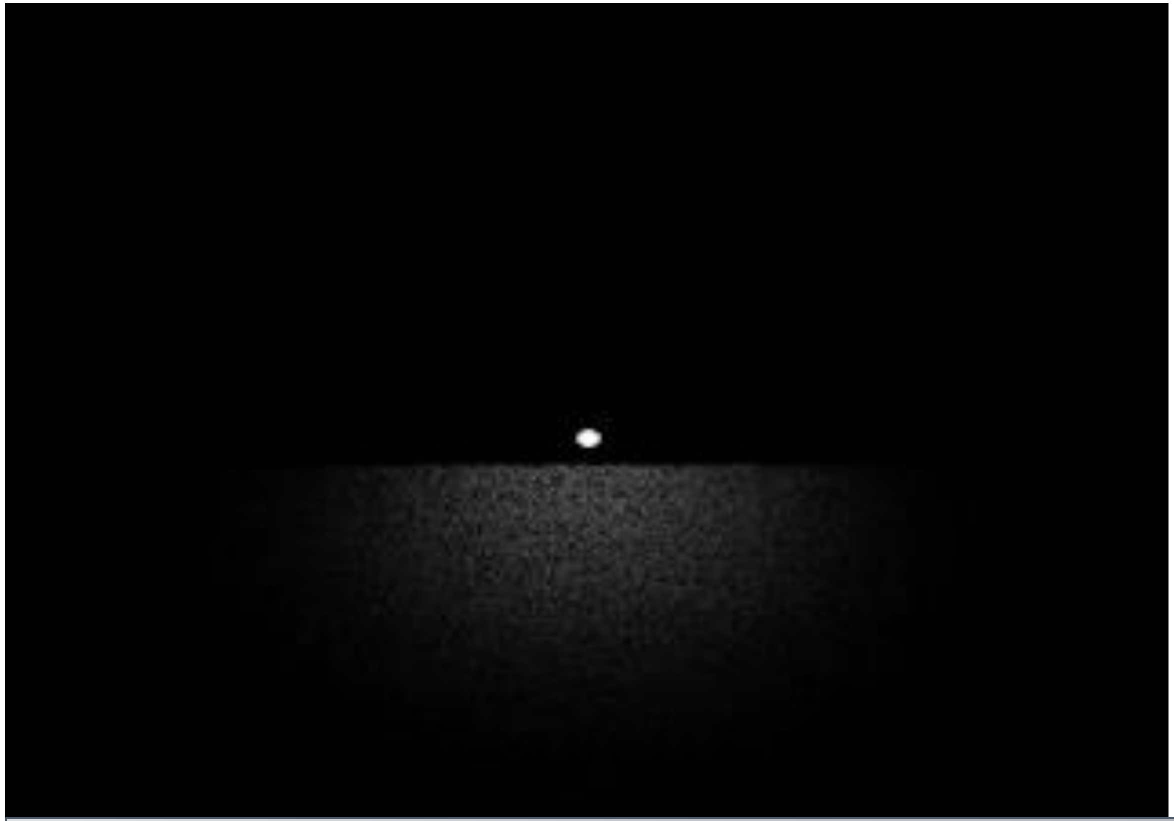
中間ベクトル



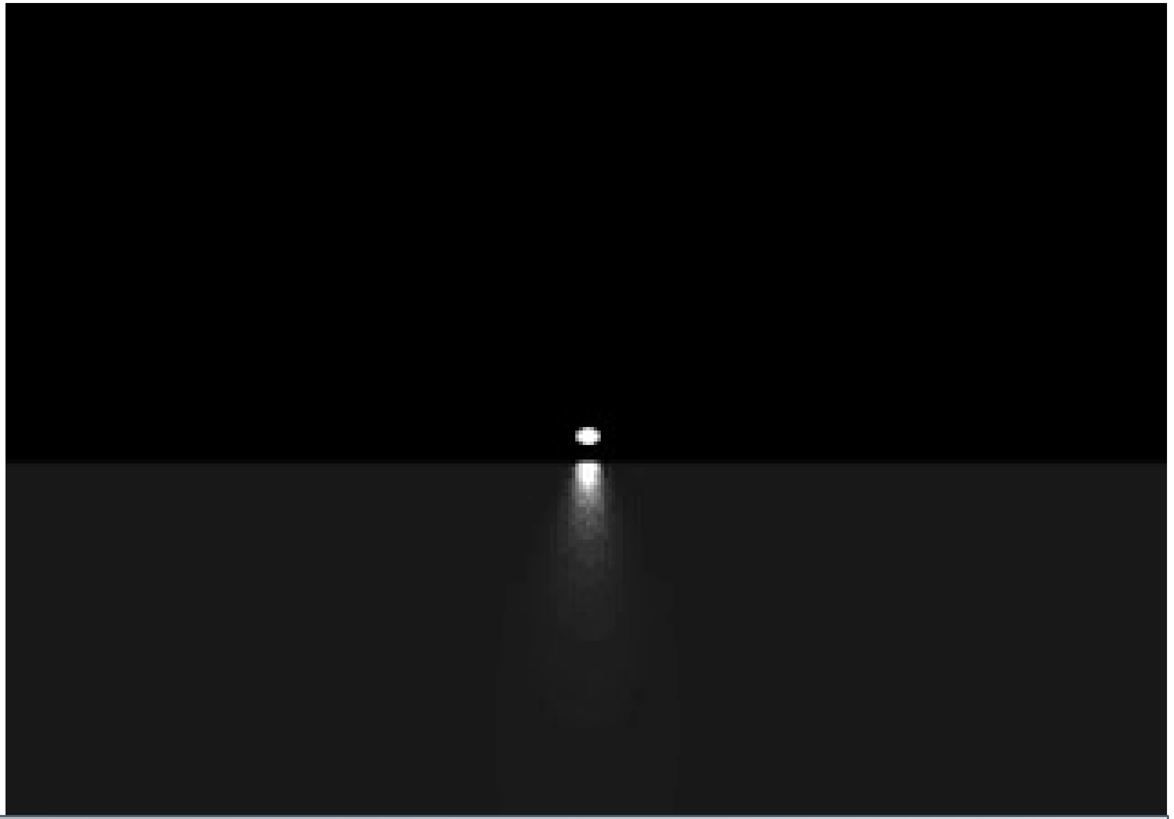
L と **V** の中間ベクトル **H** と
法線ベクトル **N** がなす角 θ_h

レンダリング結果の違い

正反射ベクトルによるハイライト



中間ベクトルによるハイライト



篠原 靖知:“粗い物体の表面形状計測に基づく陰影付けモデルの決定および樹脂成型物の質感設計への応用,” 和歌山大学システム工学部卒業論文 (2001)

現実のシーン

Oren-Nayer BRDF

- **拡散**反射面 (Lambertian facets) に微小面理論を適用

$$f(\mathbf{L}, \mathbf{V}) = \frac{c_{diff}}{\pi}(A + B\overline{\cos}\phi \sin(\min(\theta_i, \theta_o)) \tan(\max(\theta_i, \theta_o)))$$

$$A = 1 - 0.5\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + 0.33}$$

$$B = 0.45\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + 0.09}$$

粗さ s は面全体の法線ベクトルと微小面の法線ベクトルのなす角の標準偏差

粗さ s

s = 0.0

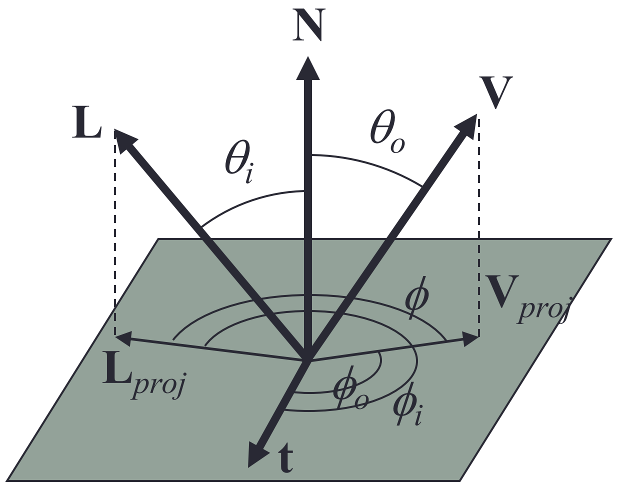
s = 3.0

実装

$$\mathbf{V}_{proj} = \mathbf{V} - \mathbf{N}(\mathbf{N}\cdot\mathbf{V})$$

$$\mathbf{L}_{proj} = \mathbf{L} - \mathbf{N}(\mathbf{N}\cdot\mathbf{V})$$

$$\cos\phi = \frac{\mathbf{V}_{proj}}{|\mathbf{V}_{proj}|}\cdot\frac{\mathbf{L}_{proj}}{|\mathbf{L}_{proj}|}$$



$$f(\mathbf{L},\mathbf{V}) = \frac{c_{diff}}{\pi}(A + B\overline{\cos}\phi\sin(\min(\theta_i,\theta_o))\tan(\max(\theta_i,\theta_o)))$$

$\sin\theta$ も $\tan\theta$ も $0<\theta<\pi/2$ では単調増加

$$\sin\theta_i = \frac{|\mathbf{L}_{proj}|}{|\mathbf{L}|},\ \sin\theta_o = \frac{|\mathbf{V}_{proj}|}{|\mathbf{V}|},\ \tan\theta_i = \frac{|\mathbf{L}_{proj}|}{\mathbf{N}\cdot\mathbf{L}},\ \tan\theta_o = \frac{|\mathbf{V}_{proj}|}{\mathbf{N}\cdot\mathbf{V}}$$

$$f(\mathbf{L},\mathbf{V}) = \frac{c_{diff}}{\pi}(A + B\overline{\cos}\phi\min(\sin\theta_i,\sin\theta_o)\max(\tan\theta_i,\tan\theta_o))$$

異方性をもつ面

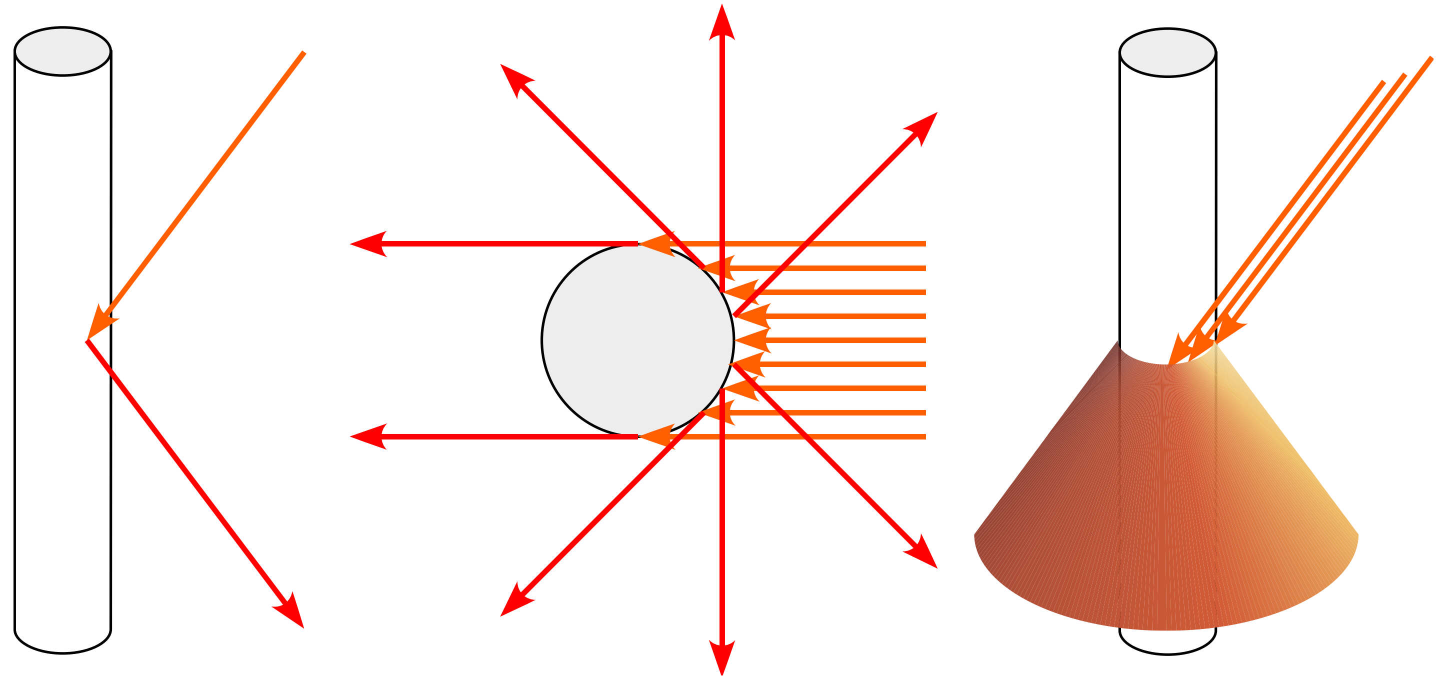
- 面の粗さが方向によって異なる

（自宅の鍋）

（嫁さまの頭）

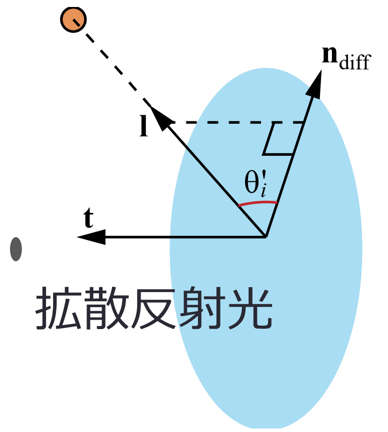
反射光の広がりが方向によって異なる

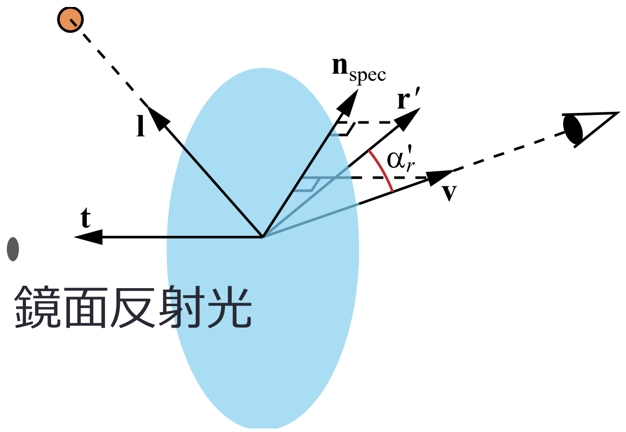
円柱に対する鏡面反射



異方性 BRDF

- The Kajiya-Kay BRDF (The Banks BRDF)





$$\overline{\cos}\theta'_i = \sqrt{1-(\mathbf{l}\cdot\mathbf{t})^2}$$

$\mathbf{t}$：円柱の軸ベクトル

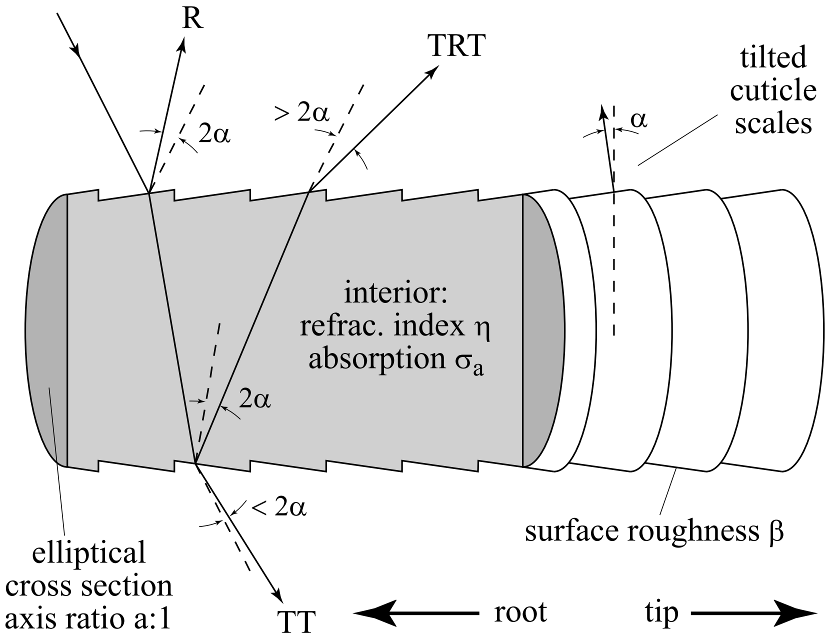
θ'_i ：$\mathbf{l}$ と軸 $\mathbf{t}$ に直交する面がなす角

これを輝き係数でベキ乗する

$$\overline{\cos}\alpha'_r = \max\left(\sqrt{1-(\mathbf{l}\cdot\mathbf{t})^2}\sqrt{1-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{t})^2}-(\mathbf{l}\cdot\mathbf{t})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{t}),0\right)$$

α'_i ：$\mathbf{v}$ と，円柱による反射光ベクトル $\mathbf{r}'$ がなす角

Marschner のモデル



Photo

Kajiya-Kay

Marschner

Marschner, Stephen R., et al. "Light scattering from human hair fibers." *ACM Transactions on Graphics (TOG)*. Vol. 22. No. 3. ACM, 2003.

実測にもとづく BRDF

- 計測方法
  - ゴニオメーター (Goniometer)
  - imaging bidirectional reflectmeter
  - イメージベースド手法
- データベース
  - Cornell University Program of Computer Graphics Measurement Data
    - http://www.graphics.cornell.edu/online/measurements/
  - Colombia-Utrecht Reflectance and Texture Database
    - http://www.cs.columbia.edu/CAVE/software/curet/
  - MIT Anisotropic BRDF Measurement Data
    - http://people.csail.mit.edu/addy/research/brdf/

計測 BRDF の表現

- BRDF の測定結果
  - 巨大で密に標本化された 4 次元データ
    - SVBRDF では 6 次元
  - ノイズを含んでいる
    - そのままではレンダリングに使えない
- 計測値と一致する解析的な BRDF モデルを選択しパラメータを算出する
  - 非常にコンパクトな表現になる
  - レンダリングも速い
  - BRDF モデルの選択は単純だとは限らない
- 複数の BRDF の項の重み付け和で表現する
  - Lafortune BRDF

BRDFのテーブル化

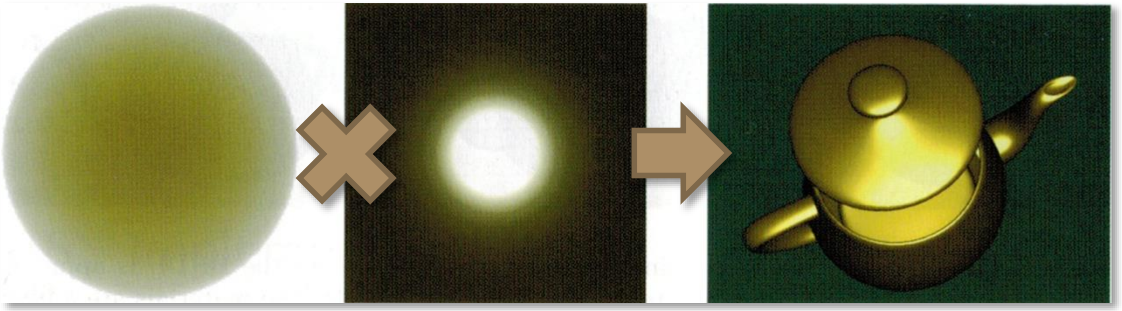
- BRDFは４変数の関数
- 多数の仰角と方位角に対するデータを配列に格納し，必要なBRDF値を補間により求める
  - 実験的に取得されたBRDF値にも応用できる
    - 実験データに含まれる雑音やデータの欠落の取り扱いに注意が必要である
  - 等方性の表面においてBRDFは３変数で表せる
    - ３次元テクスチャマップが応用できる
  - それでも非常にメモリを食う
- BRDFデータのコンパクト化
  - 以下のことを回避できる
    - 精密な理論モデルの評価（計算）コスト
    - 記憶容量の要求
    - 取得したデータの雑音の影響

因子分解による方法

- BRDFは４変数の関数
  - 入射角の仰角と方位角
  - 反射角の仰角と方位角
- 因子分解による近似
  - ４変数関数を二つの２変数関数の積の和で近似する

$$f(\theta_i, \phi_i, \theta_o, \phi_o) \approx \sum_{j=1}^{n} p_j(\theta_i, \phi_i) q_j(\theta_o, \phi_o)$$

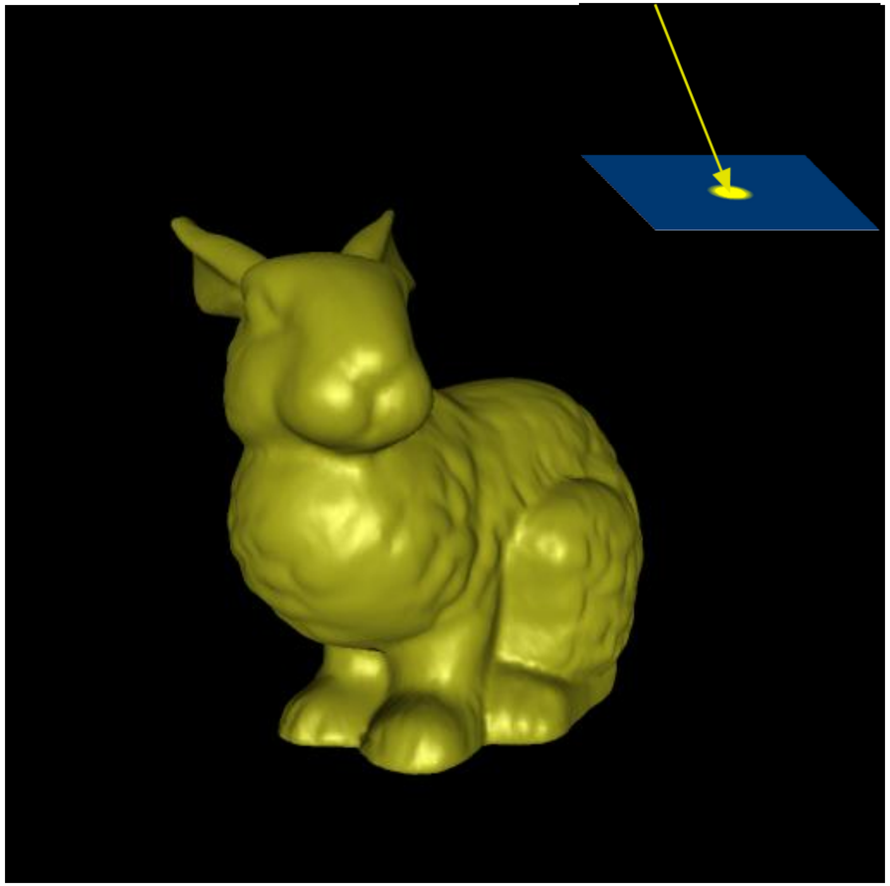
テクスチャの応用



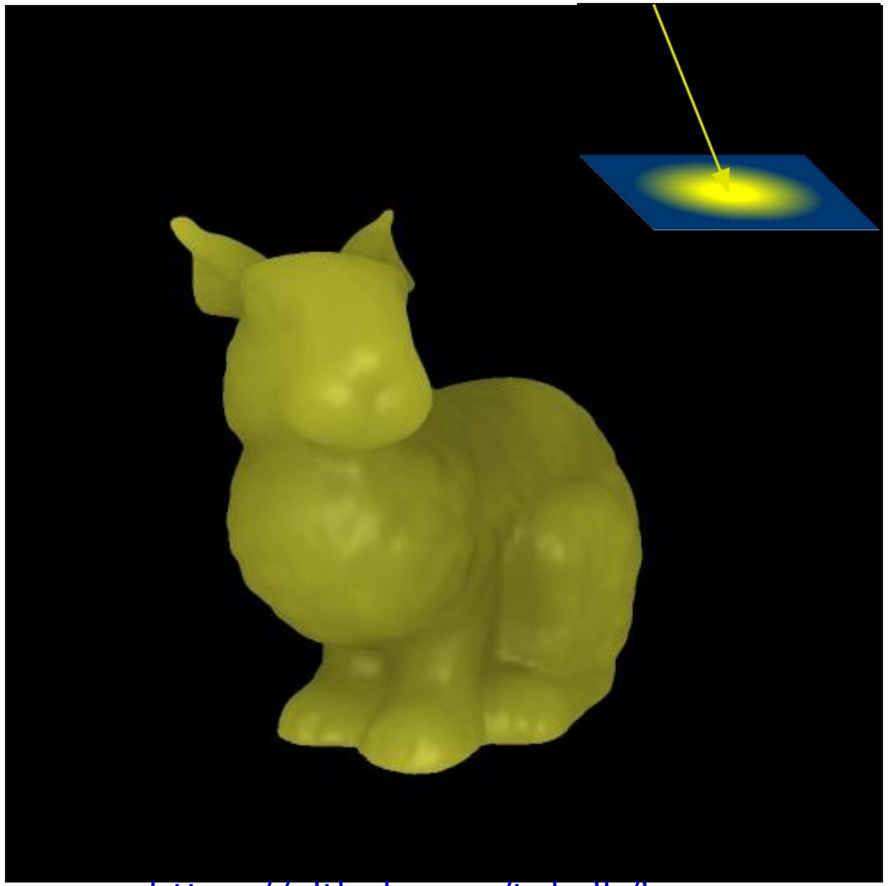
- 関数 p, q をテクスチャで表す
  - n を大きくしなければならないかもしれない
- BRDF を可能な限り少ない項で表現する
  - 多くの材質において大体納得できる結果を得るのに高々一組 ($n = 1$) の２枚のテクスチャで充分
    - McCool, “Homomorphic Factorization of BRDFs for High-Performance Rendering,” SIGGRAPH ’01 Proceedings, 2001.
    - Wynn, “Real-Time BRDF-based Lighting using Cube-Maps,” NVIDIA White Paper, 2001.
- 問題点
  - 光源ごとに少なくとも２枚のテクスチャアクセスが必要
  - 光源として点光源と平行光線しか扱えない

表面下散乱

表面下散乱が少ない



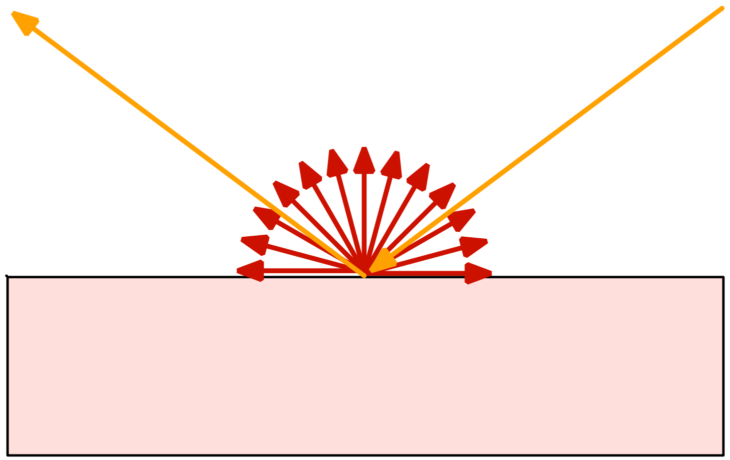
表面下散乱が多い

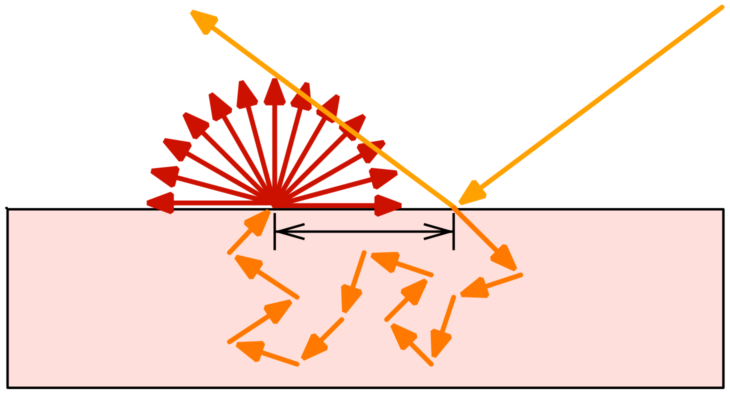


https://github.com/tokoik/imsss

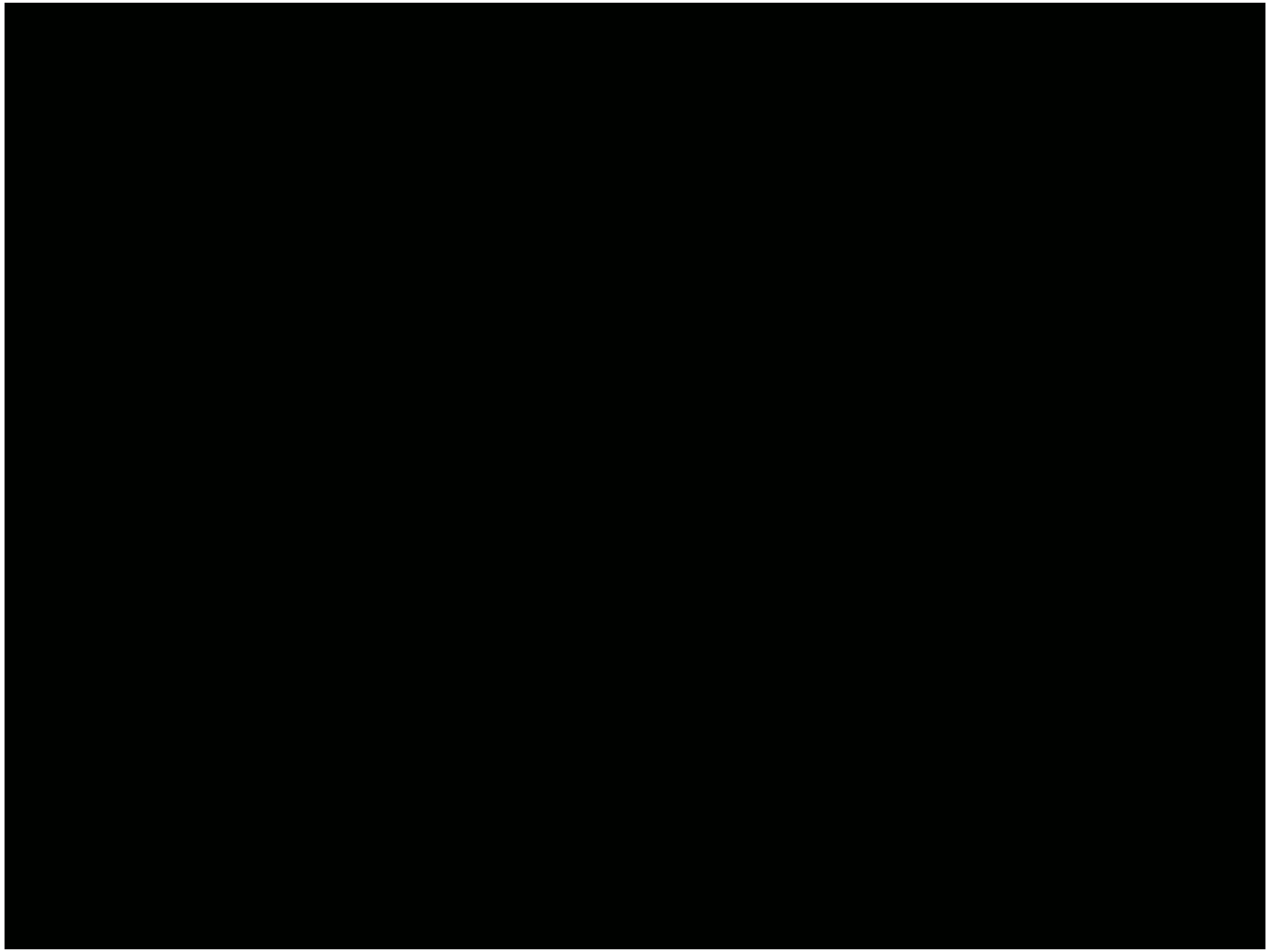
表面下散乱を考慮する場合

- BRDF は表面下散乱を考慮していない
  - 鏡面反射光も拡散反射光も入射点から放射されると考える（局所表面下散乱）
- 表面下散乱がある場合
  - 鏡面反射光は入射点で反射するが拡散反射光の放射位置は入射点と異なる
  - 入射位置から放射位置に輸送される光が存在する





表面下散乱がある場合の反射光



Screen Space Sub-Surface Scattering

BSSRDF

- Bidirectional Surface Scattering Distribution Function
  - 双方向表面散乱分布関数
- BRDF を一般化したもの
  - 関数の入力として入射位置 $\mathbf{x}_i$ と放射位置 $\mathbf{x}_o$ を加える
    - $f(\mathbf{L}, \mathbf{V}) \rightarrow f(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_o, \mathbf{V}, \mathbf{L})$
  - 表面下散乱を含むために下記の光を考慮する
    - 入射方向に沿った光の割合
    - 表面上のある点から別の点へ移動する光の割合
    - 放射方向に沿った光の割合
- カメラが十分に遠い場合
  - 入射位置と放射位置が一致すると近似できる

さらに一般化

- 材質は物体表面全体で均一ではない
  - 単一の物質でも粗さや汚れなどで変化する
  - SVBRDF (Spatially Varying BRDF) または SBRDF (Spatial BRDF)
    - Goldman, Dan B., et al. "Shape and spatially-varying brdfs from photometric stereo." *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 32.6 (2010): 1060-1071.
- 光の偏光
  - 偏光面によって反射率や透過率が異なる
- 光の輸送
  - two BRDF
  - two BTDF (Bidirectional Transmission Distribution Function)

小テスト－微小面モデル

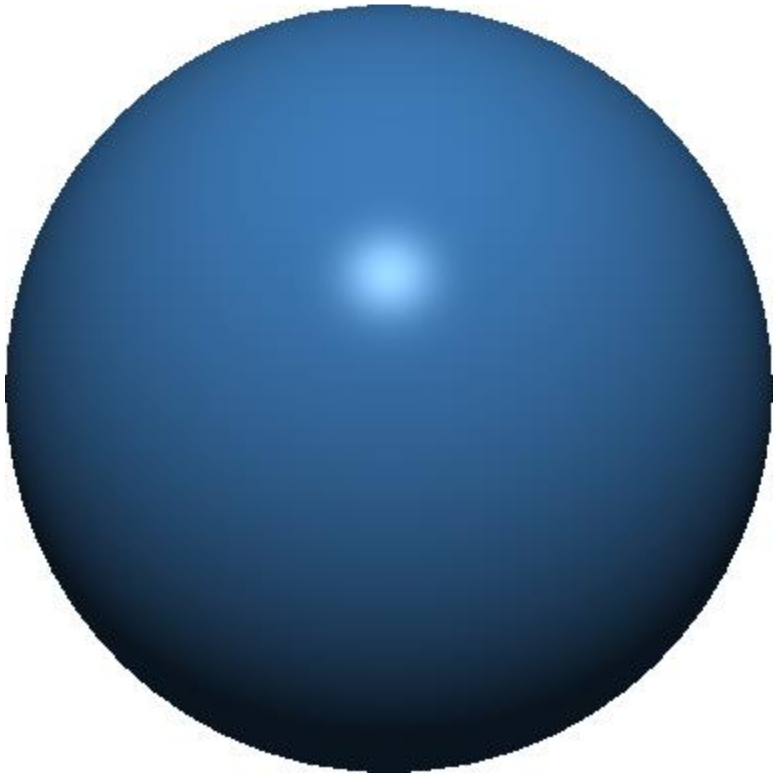
Moodle の小テストに解答してください

宿題

- Kajiya-Kay モデルにより異方性反射面の陰影付けを行ってください
  - 次のプログラムは画素単位の陰影付けを行っており，陰影付けモデルには Phong のモデルを使用しています
    - https://github.com/tokoik/ggsample07
  - この陰影付けモデルを Kajiya-Kay のモデルに変更してください
  - 表面の「円柱」の軸は接線ベクトル **t** 方向を向いているとします
  - **t** はフラグメントシェーダ ggsample07.frag 内で求めてあります
- ggsample07.frag を**アップロード**してください

宿題プログラムの生成画像

Blinn-Phong モデルの陰影



Kajiya-Kay モデルの陰影