ゲームグラフィックス特論

第4回 変換 (2)

剛体アニメーション

時刻を扱う

剛体変換

- 立体の移動と回転
- 一般的に立体の形状に影響を与えない（＝剛体）

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}(\mathbf{t})\,\mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} r_{00} & r_{10} & r_{20} & t_x \\ r_{01} & r_{11} & r_{21} & t_y \\ r_{02} & r_{12} & r_{22} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} r_{00} & r_{10} & r_{20} \\ r_{01} & r_{11} & r_{21} \\ r_{02} & r_{12} & r_{22} \end{pmatrix} \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{R}} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}$$

剛体アニメーション

- 剛体変換によるアニメーション
  - 形状の変形を伴わない
- 剛体変換

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{R}} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{R}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{I}$: 単位行列

$\mathbf{t}$: 位置　　$\bar{\mathbf{R}}$: 回転

(オイラー変換を使う場合)

$$\mathbf{t}(t) = \mathbf{P}(t) \qquad \mathbf{E}(h, p, r) = \mathbf{R}_y(h)\,\mathbf{R}_x(p)\,\mathbf{R}_z(r)$$

t: 時刻

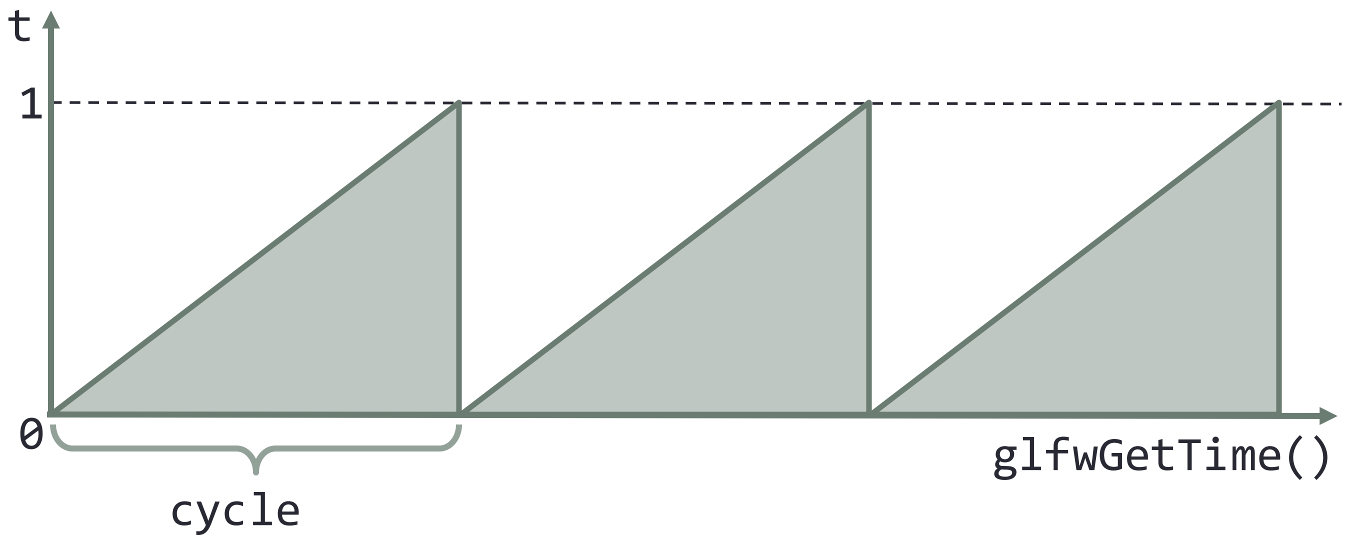
$$\Downarrow$$

$$\bar{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{R}_y(h(t))\,\mathbf{R}_x(p(t))\,\mathbf{R}_z(r(t))$$

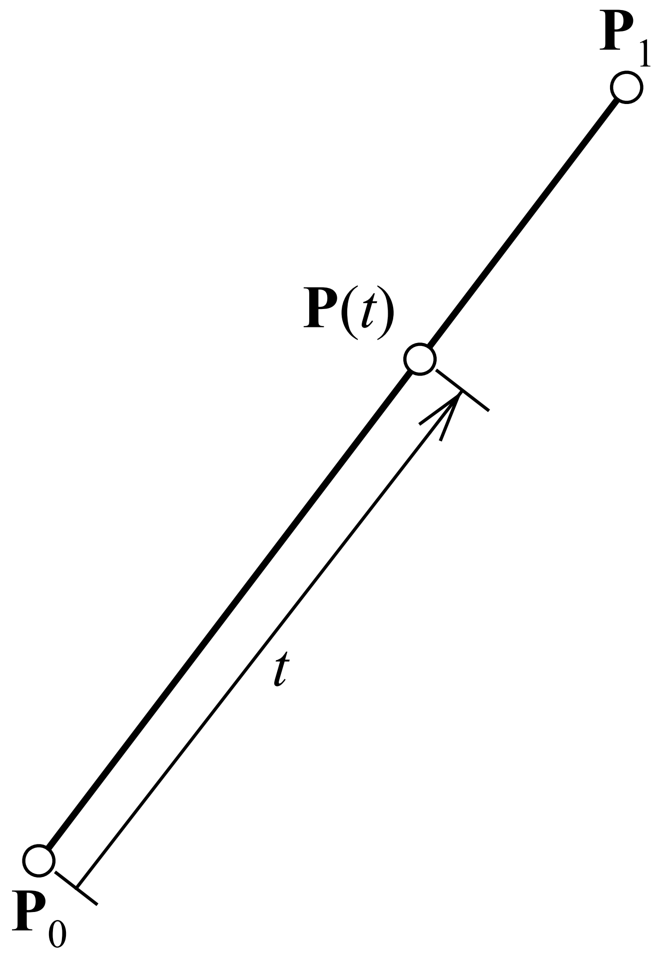
現在時刻の取得

- システムの時計から時刻を得る
  - ここでは glfwSetTime(), glfwGetTime() を利用する

```
// 周期
const auto cycle{ 5.0 };

// 経過時間のリセット
glfwSetTime(0.0);

// ウィンドウが開いている間繰り返す
while (window)
{
  ...

  // 時刻の計測（周期５秒）
  const auto t{ static_cast<float>(fmod(glfwGetTime(), cycle) / cycle) };
```



線形補間 (Linear interpolation, Lerp)



- 2点 $\mathbf{P}_0$ と $\mathbf{P}_1$ を結ぶ線分を $t \in [0, 1]$ で内分する点 $\mathbf{P}(t)$

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0(1 - t) + \mathbf{P}_1 t$$

この $\mathbf{P}(t)$ を使って平行移動する

平行移動の変換行列を求める

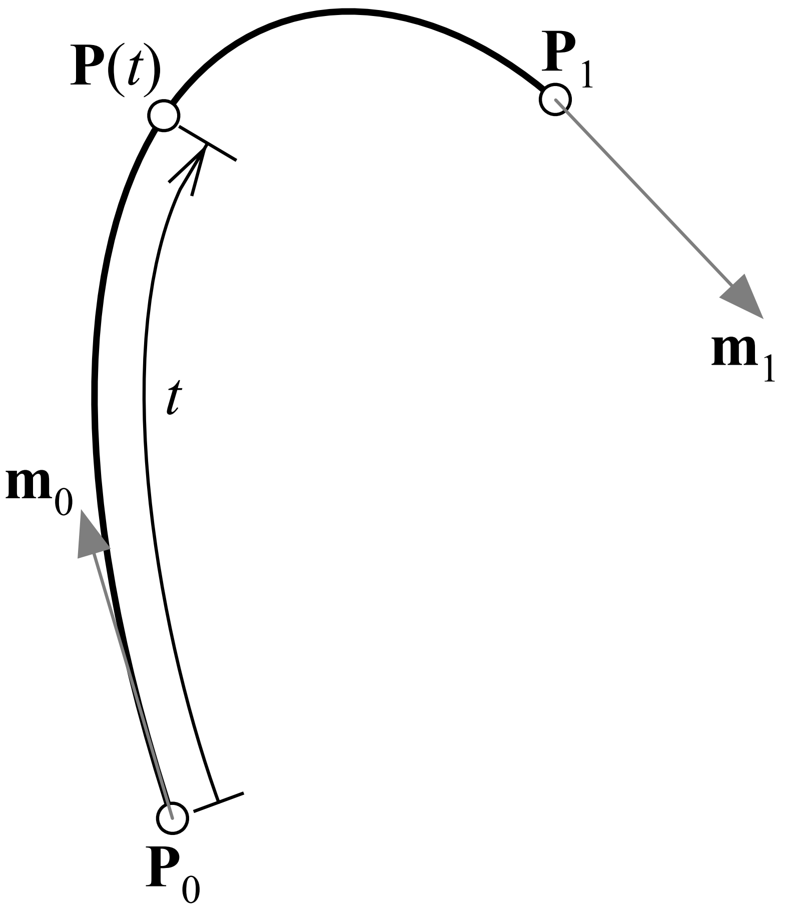
```
/*
** 平行移動変換行列を求める
*/
void translate(float* m, float tx, float ty, float tz)
{
  m[ 3] = tx;
  m[ 7] = ty;
  m[11] = tz;
  m[ 0] = m[ 5] = m[10] = m[15] = 1.0f;
  m[ 1] = m[ 2] = m[ 4] =
  m[ 6] = m[ 8] = m[ 9] =
  m[12] = m[13] = m[14] = 0.0f;
}
```

$$\mathbf{T}(\mathbf{t}) = \mathbf{T}(t_x, t_y, t_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2点間を直線移動する変換行列を得る

```
/*
** 平行移動アニメーションの変換行列を求める
*/
void lerp(float* m, const float* p0, const float* p1, float t)
{
  const auto x{ (p1[0] - p0[0]) * t + p0[0] };
  const auto y{ (p1[1] - p0[1]) * t + p0[1] };
  const auto z{ (p1[2] - p0[2]) * t + p0[2] };

  translate(m, x, y, z);
}
```

Cubic Hermite Spline



- $\mathbf{P}_0$ における速度が $\mathbf{m}_0$ である点が、$\mathbf{P}_1$ において速度が $\mathbf{m}_1$ となるように滑らかに移動する場合の、時刻 $t \in [0,1]$ における点の位置 $\mathbf{P}(t)$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(t) = {} & \mathbf{P}_0(2t^3 - 3t^2 + 1) \\
& + \mathbf{m}_0(t^3 - 2t^2 + t) \\
& + \mathbf{P}_1(-2t^3 + 3t^2) \\
& + \mathbf{m}_1(t^3 - t^2)
\end{aligned}
$$

Cubic Hermite Splineの求め方

- 二点$\mathbf{p}_0$，$\mathbf{p}_1$を通り，点$\mathbf{p}_0$における接線が$\mathbf{m}_0$，$\mathbf{p}_1$における接線が$\mathbf{m}_1$となる三次曲線

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{a}t^3 + \mathbf{b}t^2 + \mathbf{c}t + \mathbf{d}$$

- これを一回微分

$$\mathbf{p}'(t) = 3\mathbf{a}t^2 + 2\mathbf{b}t + \mathbf{c}$$

- $t = 0$において

$$\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0 = \mathbf{d}$$
$$\mathbf{p}'(0) = \mathbf{m}_0 = \mathbf{c}$$

- $t = 1$において

$$\mathbf{p}(1) = \mathbf{p}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}$$
$$\mathbf{p}'(1) = \mathbf{m}_1 = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$$

- したがって

$$\mathbf{c} = \mathbf{m}_0$$
$$\mathbf{d} = \mathbf{p}_0$$

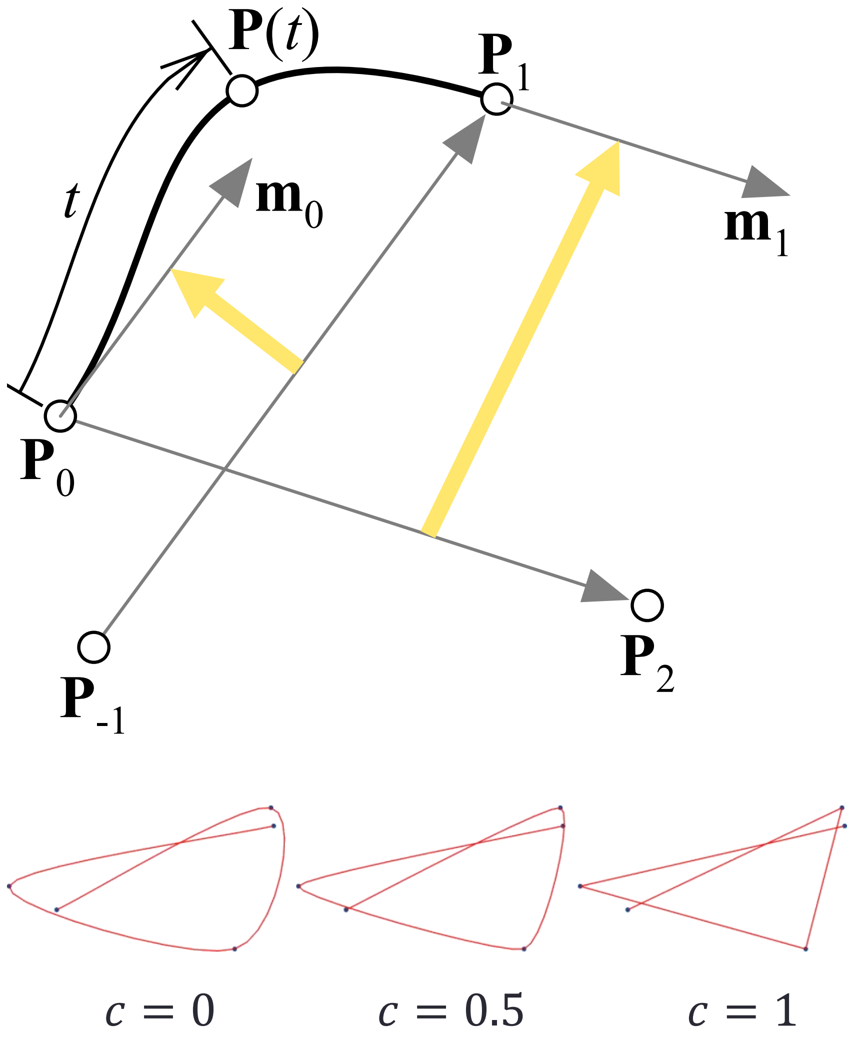
- $\mathbf{a}$を消去して

$$3\mathbf{p}_1 - \mathbf{m}_1 = \mathbf{b} + 2\mathbf{c} + 3\mathbf{d}$$
$$\begin{aligned}\mathbf{b} &= 3\mathbf{p}_1 - \mathbf{m}_1 - 3\mathbf{p}_0 - 2\mathbf{m}_0 \\ &= 3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) - \mathbf{m}_1 - 2\mathbf{m}_0\end{aligned}$$

- $\mathbf{b}$を消去して

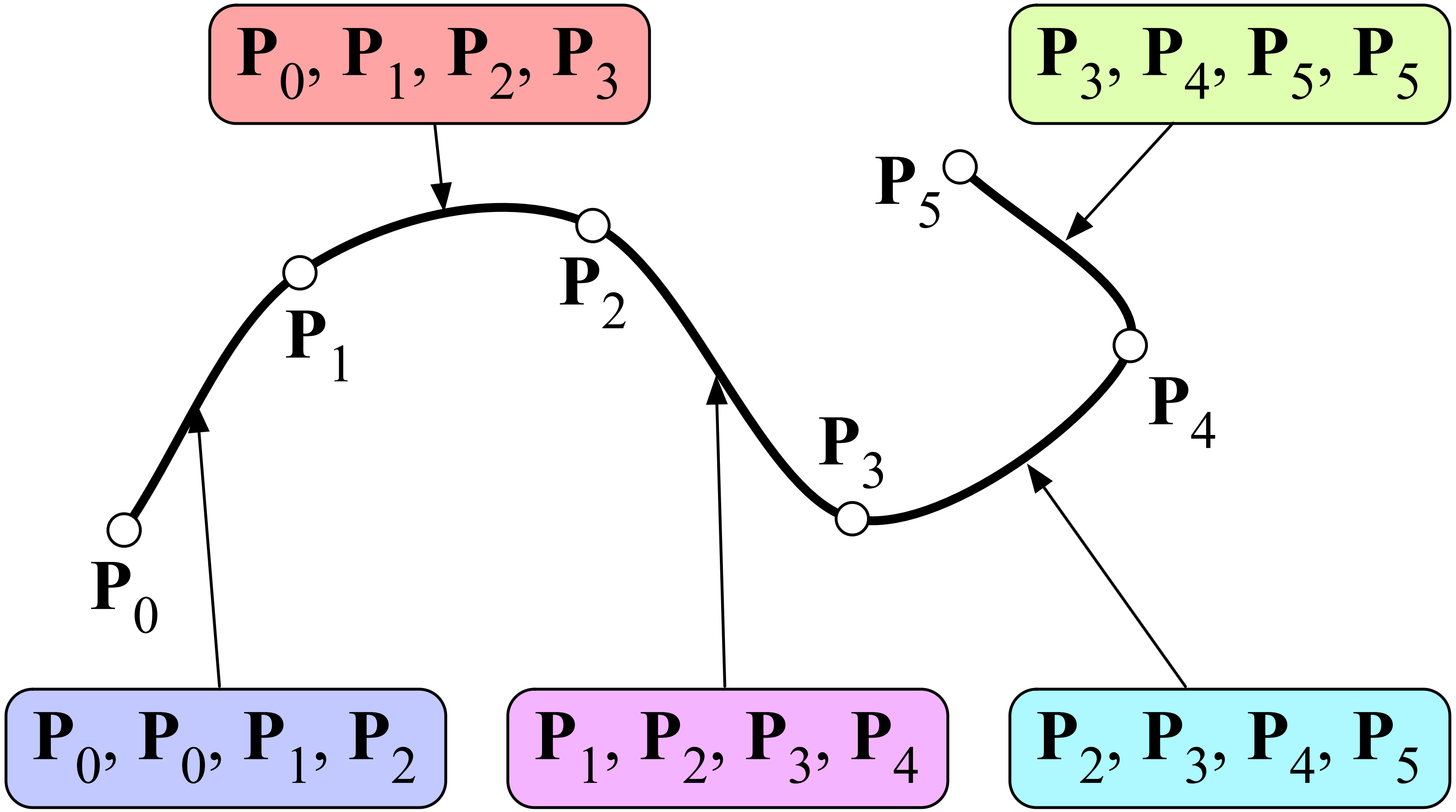
$$\mathbf{m}_1 - 2\mathbf{p}_1 = \mathbf{a} - \mathbf{c} - 2\mathbf{d}$$
$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \mathbf{m}_1 - 2\mathbf{p}_1 + \mathbf{m}_0 + 2\mathbf{p}_0 \\ &= -2(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) + \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_0\end{aligned}$$

Catmull-Rom Spline



- Cubic Hermite Spline において
  - $\mathbf{m}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_{-1})$
  - $\mathbf{m}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_0)$
- Cardinal Spline
  - $\mathbf{m}_0 = \frac{1-c}{2}(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_{-1})$
  - $\mathbf{m}_1 = \frac{1-c}{2}(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_0)$
  - c はテンション（張り）
    - $c = 1$ ：折れ線
    - $c = 0$ ：Catmull-Rom Spline

Catmull-Rom Spline 曲線の接続



Catmull-Rom Spline のサンプルコード

```
/*
** Catmull-Rom Spline
*/
float catmull_rom(float x0, float x1, float x2, float x3, float t)
{
  const auto m0{ (x2 - x0) * 0.5f };
  const auto m1{ (x3 - x1) * 0.5f };

  const auto d{ x1 - x2 };
  const auto a{ 2.0f * d + m0 + m1 };
  const auto b{ -3.0f * d - 2.0f * m0 - m1 };

  return ((a * t + b) * t + m0) * t + x1;
}
```

Cardinal Spline のサンプルコード

```
/*
** Cardinal Spline
*/
float cardinal(float x0, float x1, float x2, float x3, float t, float c)
{
  const auto c1{ (1.0f - c) * 0.5f };
  const auto m0{ (x2 – x0) * c1 };
  const auto m1{ (x3 – x1) * c1 };

  const auto d{ x1 – x2 };
  const auto a{ 2.0f * d + m0 + m1 };
  const auto b{ –3.0f * d – 2.0f * m0 – m1 };

  return ((a * t + b) * t + m0) * t + x1;
}
```

Catmull-Rom Spline による補間

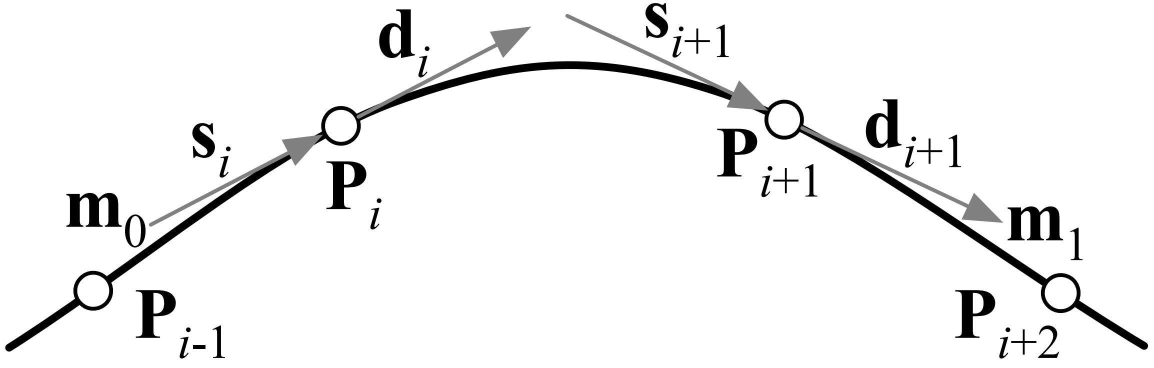
```
/*
** Catmull-Rom Spline による点列の補間
*/
void interpolate(float* p,
  const float* p0,
  const float* p1,
  const float* p2,
  const float* p3,
  float t)
{
  p[0] = catmull_rom(p0[0], p1[0], p2[0], p3[0], t);
  p[1] = catmull_rom(p0[1], p1[1], p2[1], p3[1], t);
  p[2] = catmull_rom(p0[2], p1[2], p2[2], p3[2], t);
}
```

Kochanek-Bartels Spline

- Cubic Hermite Spline において点 i の進入側と退出側の速度 $\mathbf{s}_i$, $\mathbf{d}_i$ を別々に求める

$$\mathbf{s}_i = \frac{(1-t)(1+b)(1-c)}{2}(\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i-1}) + \frac{(1-t)(1-b)(1+c)}{2}(\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i)$$

$$\mathbf{d}_i = \frac{(1-t)(1+b)(1+c)}{2}(\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i-1}) + \frac{(1-t)(1-b)(1-c)}{2}(\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i)$$



t: Tension
b: Bias
c: Continuity

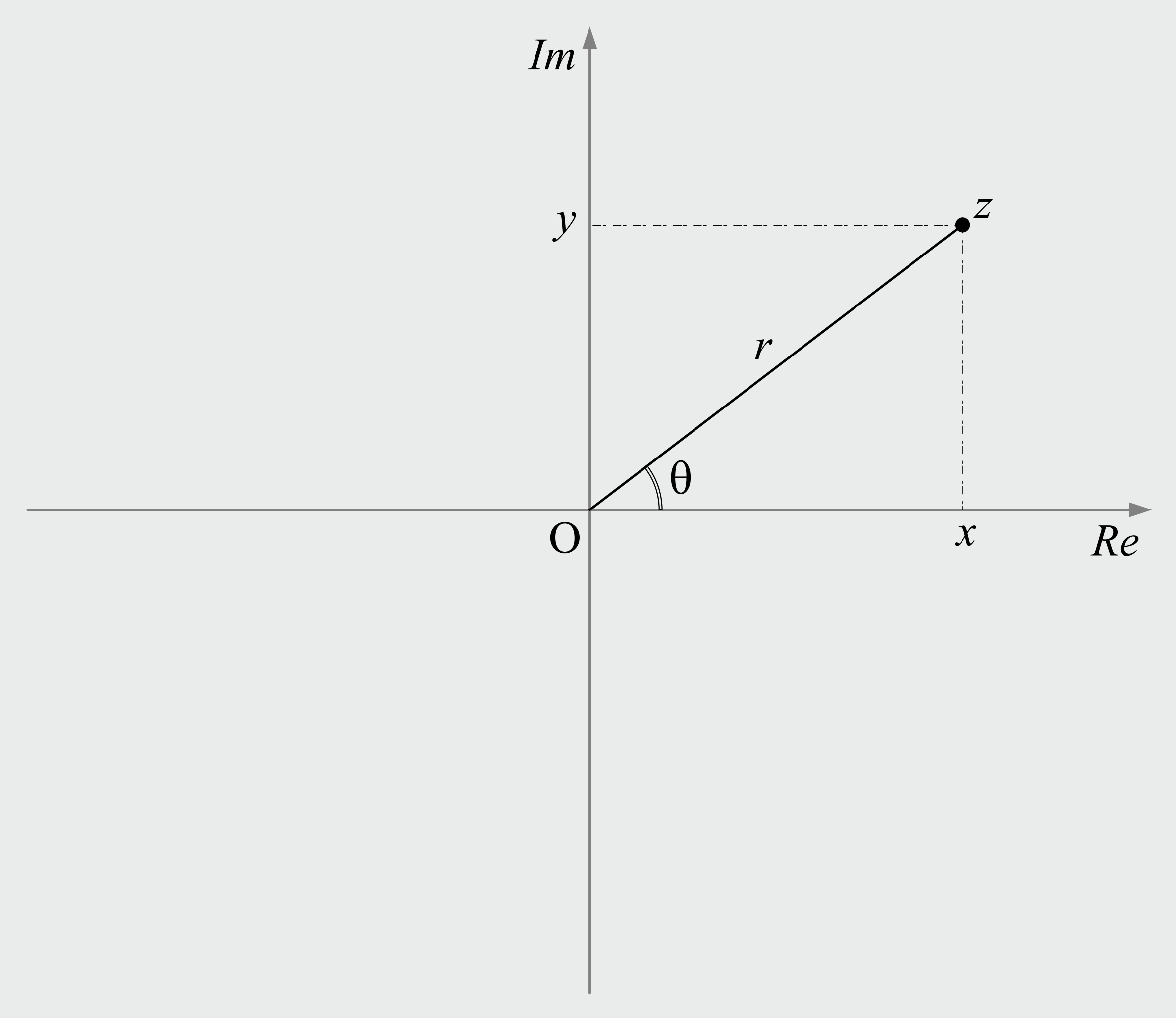
TBC Spline と呼ばれる

四元数

回転の道具として

複素数

- $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$
  - z: 複素数
  - x: 実部
  - y: 虚部
  - $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
  - i: 虚数単位, $i = \sqrt{-1}, i^2 = -1$
  - θ: 偏角



オイラーの公式

- $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$
  - $|\cos\theta + i\sin\theta| = |e^{i\theta}| = 1$
  - $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$
  - $\log(\cos\theta + i\sin\theta) = i\theta$

複素数の積

- $$\begin{aligned}(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \\ &= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) \\ &= e^{i(\alpha+\beta)} \\ &= e^{i\alpha}e^{i\beta}\end{aligned}$$

偏角の和

複素数による回転

- 2次元上の座標 (x, y) を複素数で表す

$$x + iy$$

- 複素数による角度 θ の回転

$$\cos\theta + i\sin\theta$$

- これらを掛ける

$$\begin{aligned}(x' + iy') &= (x + iy)(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= x\cos\theta - y\sin\theta + i(x\sin\theta + y\cos\theta)\end{aligned}$$

- すなわち

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

四元数（クォータニオン）

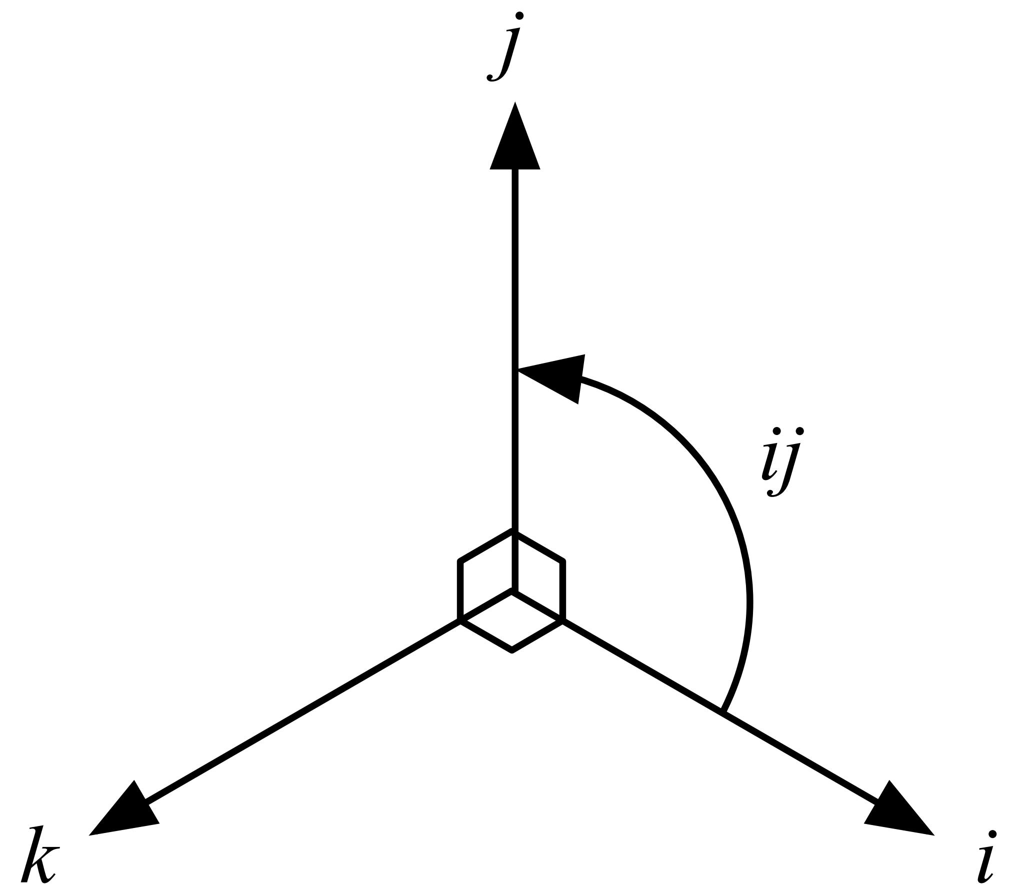
- 複素数の虚部を三次元に拡張したもの
  - $\hat{\mathbf{q}} = (q_x, q_y, q_z, q_w), \mathbf{q}_v = (q_x, q_y, q_z) \Rightarrow \hat{\mathbf{q}} = (\mathbf{q}_v, q_w)$

虚部　実部

- 定義
  - $\hat{\mathbf{q}} = (\mathbf{q}_v, q_w) = iq_x + jq_y + kq_z + q_w = \mathbf{q}_v + q_w$
  - $\mathbf{q}_v = iq_x + jq_y + kq_z = (q_x, q_y, q_z)$
  - $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
  - $jk = -kj = i, ki = -ik = j, ij = -ji = k$

i, j, k: 虚数単位

四元数の虚数単位の関係のイメージ



四元数の演算

- 積

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{r}} &= (iq_x + jq_y + kq_z + q_w)(ir_x + jr_y + kr_z + r_w) \\
&= i(q_y - r_z + r_w q_x + q_w r_x) \\
&\quad + j(q_z - r_x + r_w q_y + q_w r_y) \\
&\quad + k(q_x - r_y + r_w q_z + q_w r_z) \\
&\quad + q_w r_w - q_x r_x - q_y r_y - q_z r_z \\
&= (\mathbf{q}_v \times \mathbf{r}_v + r_w \mathbf{q}_v + q_w \mathbf{r}_v,\, q_w r_w - \mathbf{q}_v \cdot \mathbf{r}_v)
\end{aligned}
$$

四元数の積のサンプルコード

```
/*
** p <- q * r
*/
void qmul(float* p, const float* q, const float* r)
{
  p[0] = q[1] * r[2] - q[2] * r[1] + r[3] * q[0] + q[3] * r[0];
  p[1] = q[2] * r[0] - q[0] * r[2] + r[3] * q[1] + q[3] * r[1];
  p[2] = q[0] * r[1] - q[1] * r[0] + r[3] * q[2] + q[3] * r[2];
  p[3] = q[3] * r[3] - q[0] * r[0] - r[1] * q[1] - q[2] * r[2];
}
```

四元数の演算

- 和

$$\hat{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{r}} = (\mathbf{q}_v, q_w) + (\mathbf{r}_v, r_w) = (\mathbf{q}_v + \mathbf{r}_v, q_w + r_w)$$

要素ごとに足す

- 共役

$$\hat{\mathbf{q}}^* = (\mathbf{q}_v, q_w)^* = (-\mathbf{q}_v, q_w)$$

虚数部の向きを反転

- ノルム

$$n(\hat{\mathbf{q}}) = \sqrt{\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{q}}^*} = \sqrt{\hat{\mathbf{q}}^*\hat{\mathbf{q}}} = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 + q_w^2}$$

$\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{q}}^* = \hat{\mathbf{q}}^*\hat{\mathbf{q}}$ は要素ごとの積の和

- 単位元

$$\hat{\mathbf{i}} = (\mathbf{0}, 1)$$

$\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{i}}\hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{q}}$

逆元

- ノルム

$$n(\hat{\mathbf{q}}) = \sqrt{\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{q}}^*} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{q}}^*}}{n(\hat{\mathbf{q}})} = 1$$

- より，逆元は

$$\hat{\mathbf{q}}^{-1} = \frac{\hat{\mathbf{q}}^*}{|n(\hat{\mathbf{q}})|^2}$$

四元数の公式と法則

- 共役の公式

$$(\hat{\mathbf{q}}^*)^* = \hat{\mathbf{q}}$$

$$(\hat{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{r}})^* = \hat{\mathbf{q}}^* + \hat{\mathbf{r}}^*$$

$$(\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{r}})^* = \hat{\mathbf{r}}^*\hat{\mathbf{q}}^*$$

- ノルムの公式

$$n(\hat{\mathbf{q}}^*) = n(\hat{\mathbf{q}})$$

$$n(\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{r}}) = n(\hat{\mathbf{q}})n(\hat{\mathbf{r}})$$

- 線形性

$$\hat{\mathbf{p}}(s\hat{\mathbf{q}} + t\hat{\mathbf{r}}) = s\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{q}} + t\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{r}}$$

$$(s\hat{\mathbf{p}} + t\hat{\mathbf{q}})\hat{\mathbf{r}} = s\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{r}} + t\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{r}}$$

- 結合の法則

$$\hat{\mathbf{p}}(\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{r}}) = (\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{q}})\hat{\mathbf{r}}$$

単位四元数

- 四元数 $\hat{\mathbf{q}} = (\mathbf{q}_v, q_w)$ のノルムが 1 のとき
  - すなわち $n(\hat{\mathbf{q}}) = 1$ である
  - ここで $\mathbf{u}_q$ を $\|\mathbf{u}_q\| = 1$ のベクトル（単位ベクトル）とすれば
  - これは $\hat{\mathbf{q}} = \left(\sin\phi\,\mathbf{u}_q, \cos\phi\right) = \sin\phi\,\mathbf{u}_q + \cos\phi$ と表せる
  - このとき $n(\hat{\mathbf{q}}) = n\left(\sin\phi\,\mathbf{u}_q, \cos\phi\right) = \sqrt{\sin^2\phi\left(\mathbf{u}_q \cdot \mathbf{u}_q\right) + \cos^2\phi} = 1$
- オイラーの公式より $\cos\phi + i\sin\phi = e^{i\phi}$ であることから
  - $\hat{\mathbf{q}} = \sin\phi\,\mathbf{u}_q + \cos\phi = e^{\phi\mathbf{u}_q}$

単位四元数の対数と指数

- 共役

$$\hat{\mathbf{q}}^* = \left(\sin\phi\left(-\mathbf{u}_q\right), \cos\phi\right) = \left(\sin \boxed{-\phi}\, \mathbf{u}_q, \cos \boxed{-\phi}\right)$$

角度が反転する

- 逆元

$$\hat{\mathbf{q}}^{-1} = \frac{\hat{\mathbf{q}}^*}{|n(\hat{\mathbf{q}})|^2} = \boxed{\hat{\mathbf{q}}^*}$$

共役が逆元になる

回転の変換において
角度を反転するのは
逆変換と同じ

- 対数

$$\log(\hat{\mathbf{q}}) = \log\left(e^{\phi \mathbf{u}_q}\right) = \boxed{\phi \mathbf{u}_q}$$

単位ベクトルに角度をかけたもの

- 指数

$$\hat{\mathbf{q}}^t = \left(\sin\phi\, \mathbf{u}_q, \cos\phi\right)^t = e^{\phi t \mathbf{u}_q} = \left(\sin \boxed{\phi t}\, \mathbf{u}_q, \cos \boxed{\phi t}\right)$$

角度が指数倍される

四元数による回転

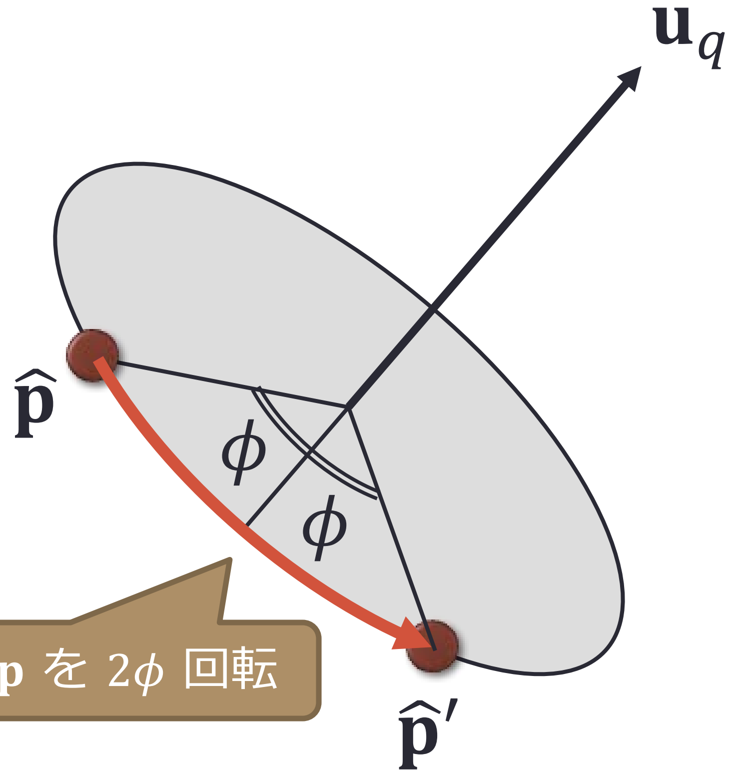
四元数を回転の道具として使う

単位四元数による回転

- 同次座標で表された点または方向 $\mathbf{p}$
  - $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z, p_w)$
- これを四元数として扱う
  - $\hat{\mathbf{p}} = (\mathbf{p}_v, p_w), \mathbf{p}_v = (p_x, p_y, p_z)$
- 単位四元数
  - $\hat{\mathbf{q}} = (\sin\phi\, \mathbf{u}_q, \cos\phi)$
- 回転の変換
  - $\hat{\mathbf{p}}' = \hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{q}}^{-1}$
- 単位四元数では $\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^*$ なので
  - $\hat{\mathbf{p}}' = \hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{q}}^*$

$\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{p}}$ は $\mathbf{p}$ を4次元空間で ϕ 回転するが虚部を3次元空間の軸に合わせるため反対から $\hat{\mathbf{q}}^{-1}$ をかけてさらに ϕ 回転しつつ4次元目の軸に対しては $-\phi$ 回転するということらしい

$\hat{\mathbf{q}}$ と $-\hat{\mathbf{q}}$ は同じ回転を表す

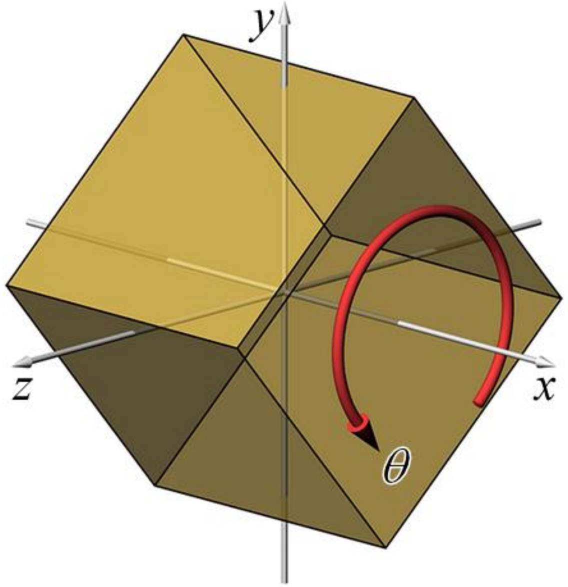


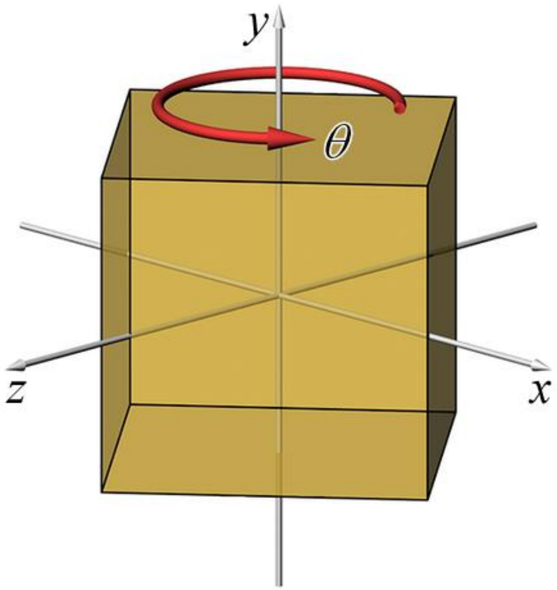
$\mathbf{u}_q$ を軸に $\mathbf{p}$ を 2ϕ 回転

座標軸中心の回転

X 軸中心の回転

$$\hat{\mathbf{q}}_x(\theta) = \left(\sin\frac{\theta}{2},\ 0,\ 0,\ \cos\frac{\theta}{2}\right) = i\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}$$



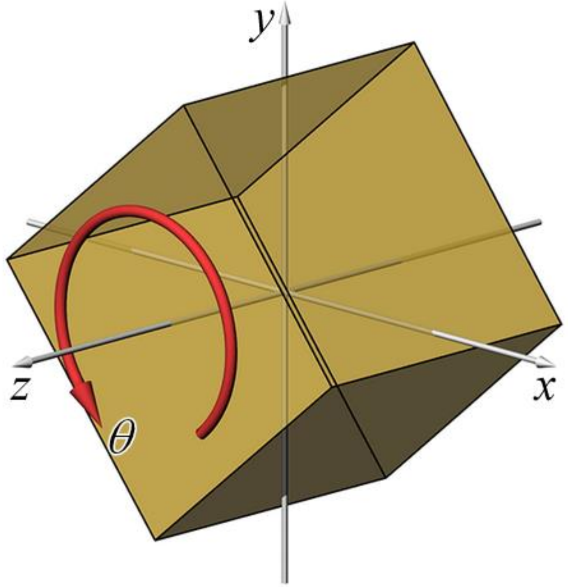


Y 軸中心の回転

$$\hat{\mathbf{q}}_y(\theta) = \left(0,\ \sin\frac{\theta}{2},\ 0,\ \cos\frac{\theta}{2}\right) = j\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}$$

Z 軸中心の回転

$$\hat{\mathbf{q}}_z(\theta) = \left(0,\ 0,\ \sin\frac{\theta}{2},\ \cos\frac{\theta}{2}\right) = k\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}$$



軸と回転角から単位四元数を求める

```
/*
** q <- 軸(x, y, z) 角度(a)
*/
void qmake(float* q, float x, float y, float z, float a)
{
  const auto l{ x * x + y * y + z * z };

  if (l > 0.0f) {
    const auto s{ sin(a *= 0.5f) / sqrt(l) };

    q[0] = x * s;
    q[1] = y * s;
    q[2] = z * s;
    q[3] = cos(a);
  }
}
```

単位四元数による回転の変換の合成

- $\hat{\mathbf{q}}$ 回転してから更に $\hat{\mathbf{r}}$ 回転する

$$\hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{q}}^*)\hat{\mathbf{r}}^* = (\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{q}})\hat{\mathbf{p}}(\hat{\mathbf{q}}^*\hat{\mathbf{r}}^*) = (\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{q}})\hat{\mathbf{p}}(\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{q}})^*$$

- したがって単位四元数の積 $\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{q}}$ も回転を表す

単位四元数の積は回転の合成になる
合成により誤差が累積しても正規化すれば「回転」であることは保たれる （正規化するにはノルムで割る → ベクトルの正規化と同じなので簡単）

四元数と回転の変換

四元数と変換行列との関係

単位四元数から回転変換行列を算出

$$\hat{\mathbf{q}} = (q_x, q_y, q_z, q_w)$$

$$\mathbf{M}^q = \begin{pmatrix} 1 - s(q_y^2 + q_z^2) & s(q_x q_y - q_w q_z) & s(q_z q_x + q_w q_y) & 0 \\ s(q_x q_y + q_w q_z) & 1 - s(q_z^2 + q_x^2) & s(q_y q_z - q_w q_x) & 0 \\ s(q_z q_x - q_w q_y) & s(q_y q_z + q_w q_x) & 1 - s(q_x^2 + q_y^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで $s = 2/n(\hat{\mathbf{q}})$ なので単位四元数では以下のように単純化できる

$$\mathbf{M}^q = \begin{pmatrix} 1 - 2(q_y^2 + q_z^2) & 2(q_x q_y - q_w q_z) & 2(q_z q_x + q_w q_y) & 0 \\ 2(q_x q_y + q_w q_z) & 1 - 2(q_z^2 + q_x^2) & 2(q_y q_z - q_w q_x) & 0 \\ 2(q_z q_x - q_w q_y) & 2(q_y q_z + q_w q_x) & 1 - 2(q_x^2 + q_y^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

単位四元数にしてしまえば変換に三角関数は不要

単位四元数から回転変換行列を得る

```
/*
** 回転変換行列 m <- 単位四元数 q
*/
void qrot(float* m, const float* q)
{
  const auto xx{ q[0] * q[0] * 2.0f };
  const auto yy{ q[1] * q[1] * 2.0f };
  const auto zz{ q[2] * q[2] * 2.0f };
  const auto xy{ q[0] * q[1] * 2.0f };
  const auto yz{ q[1] * q[2] * 2.0f };
  const auto zx{ q[2] * q[0] * 2.0f };
  const auto xw{ q[0] * q[3] * 2.0f };
  const auto yw{ q[1] * q[3] * 2.0f };
  const auto zw{ q[2] * q[3] * 2.0f };
```

```
  m[ 0] = 1.0f - yy - zz;
  m[ 1] = xy + zw;
  m[ 2] = zx - yw;
  m[ 4] = xy - zw;
  m[ 5] = 1.0f - zz - xx;
  m[ 6] = yz + xw;
  m[ 8] = zx + yw;
  m[ 9] = yz - xw;
  m[10] = 1.0f - xx - yy;
  m[ 3] = m[ 7] = m[11] =
  m[12] = m[13] = m[14] = 0.0f;
  m[15] = 1.0f;
}
```

直交行列から四元数への変換

$$\mathbf{M}^q = \begin{pmatrix} m^q_{00} & m^q_{01} & m^q_{02} & m^q_{03} \\ m^q_{10} & m^q_{11} & m^q_{12} & m^q_{13} \\ m^q_{20} & m^q_{21} & m^q_{22} & m^q_{23} \\ m^q_{30} & m^q_{31} & m^q_{32} & m^q_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2\left(q_y^2+q_z^2\right) & 2\left(q_xq_y-q_wq_z\right) & 2\left(q_zq_x+q_wq_y\right) & 0 \\ 2\left(q_xq_y+q_wq_z\right) & 1-2\left(q_z^2+q_x^2\right) & 2\left(q_yq_z-q_wq_x\right) & 0 \\ 2\left(q_zq_x-q_wq_y\right) & 2\left(q_yq_z+q_wq_x\right) & 1-2\left(q_x^2+q_y^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

行列のトレース
（対角要素の和）

$$\mathrm{tr}\left(\mathbf{M}^q\right) = \sum_{i=0}^{3} m^q_{ii} = m^q_{00} + m^q_{11} + m^q_{22} + m^q_{33} = 4 - 4\left(q_x^2 + q_y^2 + q_z^2\right) = 4q_w^2$$

直交行列から四元数への変換

- したがって

$$q_w = \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{tr}(\mathbf{M}^q)}$$

- より

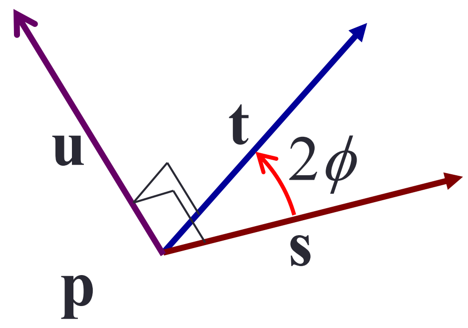
$$q_x = \frac{m_{21}^q - m_{12}^q}{4q_w}$$
$$q_y = \frac{m_{02}^q - m_{20}^q}{4q_w}$$
$$q_z = \frac{m_{10}^q - m_{01}^q}{4q_w}$$

あるいは

$$q_x = +m_{00}^q - m_{11}^q - m_{22}^q + m_{33}^q$$
$$q_y = -m_{00}^q + m_{11}^q - m_{22}^q + m_{33}^q$$
$$q_z = -m_{00}^q - m_{11}^q + m_{22}^q + m_{33}^q$$

$q_w = 0$ の場合

あるベクトルを別のベクトルの方向に向ける回転



この回転を $\hat{\mathbf{q}} = (\sin\phi\,\mathbf{u}, \cos\phi)$ とする

回転軸を $\mathbf{u}$ は $\mathbf{s}$ と $\mathbf{t}$ の外積を正規化したもの

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{s}\times\mathbf{t}}{\|\mathbf{s}\times\mathbf{t}\|}$$

（外積の定義）　（倍角の公式）

この分母 $\|\mathbf{s}\times\mathbf{t}\| = \sin 2\phi = 2\sin\phi\cos\phi$

したがって

$$\hat{\mathbf{q}} = \left(\frac{\sin\phi}{\sin 2\phi}\mathbf{s}\times\mathbf{t}, \cos\phi\right) = \left(\frac{1}{2\cos\phi}\mathbf{s}\times\mathbf{t}, \cos\phi\right)$$

（倍角の公式）

$\mathbf{s}\cdot\mathbf{t} = \cos 2\phi = e$ とおけば $\cos\phi = \sqrt{\frac{1+e}{2}}$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2(1+e)}}\mathbf{s}\times\mathbf{t}, \frac{\sqrt{2(1+e)}}{2}\right)$$

ベクトルの回転の行列表記

- したがって

$$\hat{\mathbf{q}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2(1+e)}} \mathbf{s} \times \mathbf{t}, \frac{\sqrt{2(1+e)}}{2} \right)$$

- より $\mathbf{s}$ を $\mathbf{t}$ に向ける回転の変換 $\mathbf{R}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ は

$$\mathbf{R}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \begin{pmatrix} e + hu_x^2 & hu_x u_y - u_z & hu_z u_x + u_y & 0 \\ hu_x u_y + u_z & e + hu_y^2 & hu_y u_z - u_x & 0 \\ hu_z u_x - u_y & hu_y u_z + u_x & e + hu_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z) = \frac{\mathbf{s} \times \mathbf{t}}{\|\mathbf{s} \times \mathbf{t}\|}, \quad e = \cos 2\phi = \mathbf{s} \cdot \mathbf{t}, \quad \mathrm{h} = 1 - \cos 2\phi = 1 - e$$

回転の補間

球面線形補間

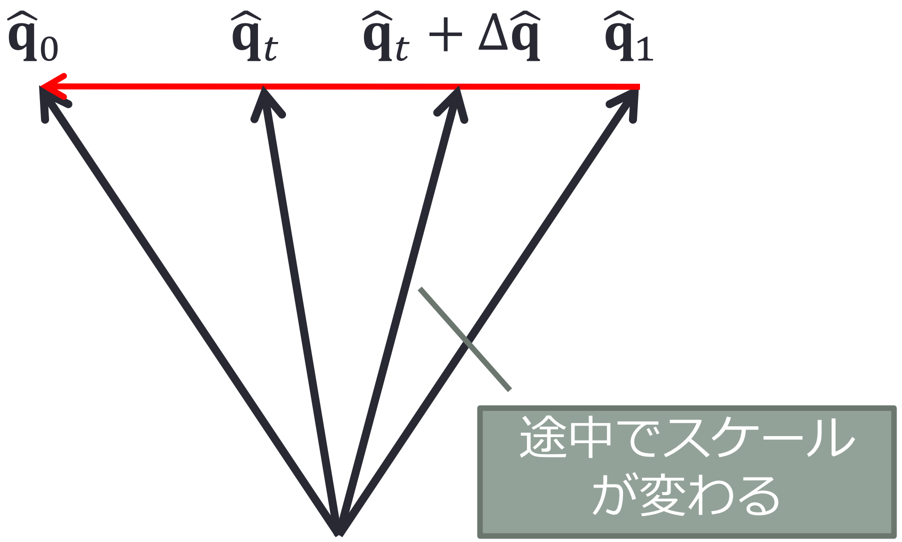
四元数を線形補間すると途中でスケールが変わる

$\hat{\mathbf{q}}_t = (1-t)\hat{\mathbf{q}}_0 + t\hat{\mathbf{q}}_1 \quad (t \in [0,1])$ という補間をすると

$$\hat{\mathbf{q}}_{t=0} = \hat{\mathbf{q}}_0$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} &= \{1-(t+\Delta t)\}\hat{\mathbf{q}}_0 + (t+\Delta t)\hat{\mathbf{q}}_1 \\ &= (1-t)\hat{\mathbf{q}}_0 + t\hat{\mathbf{q}}_1 + \Delta t(\hat{\mathbf{q}}_1 - \hat{\mathbf{q}}_0) \\ &= \hat{\mathbf{q}}_t + \Delta\hat{\mathbf{q}}\end{aligned}$$

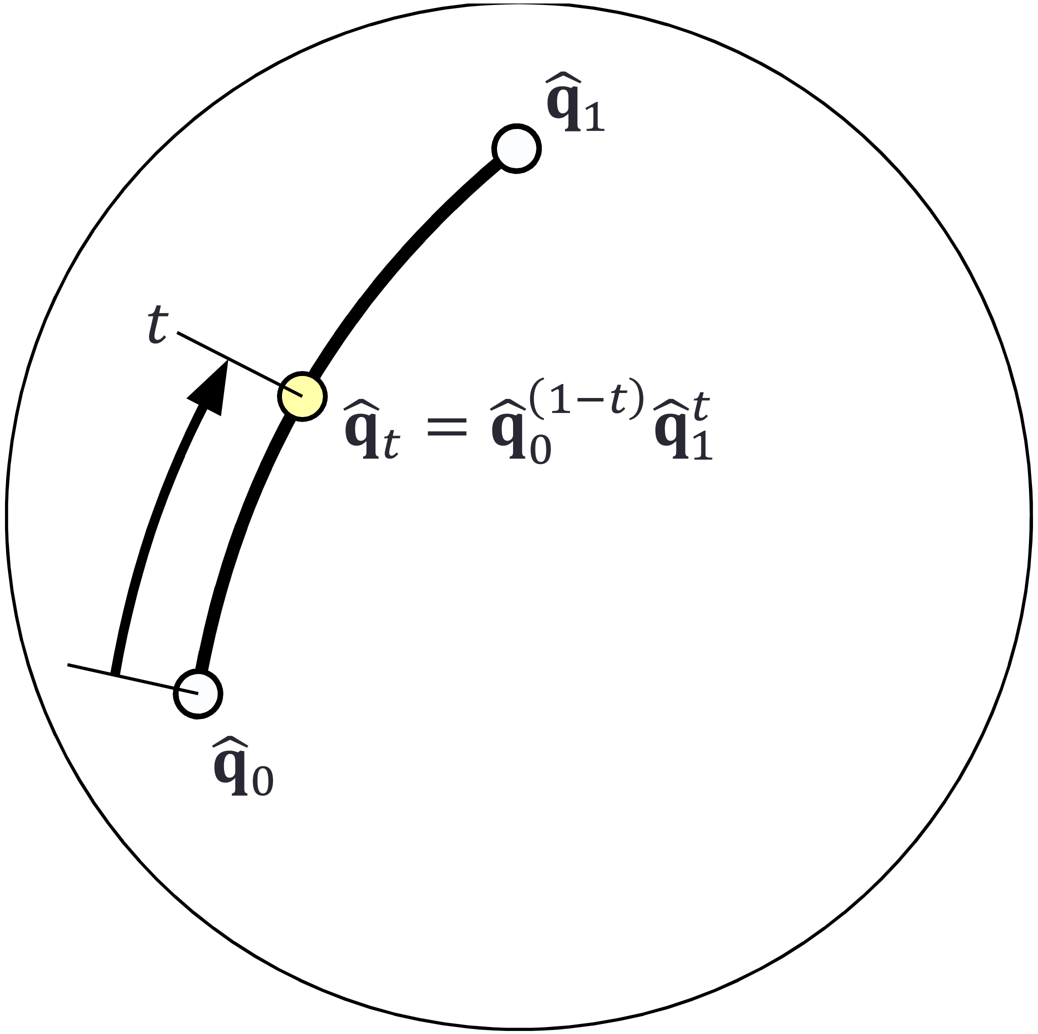
ここで $\Delta\hat{\mathbf{q}} = \Delta t(\hat{\mathbf{q}}_1 - \hat{\mathbf{q}}_0)$



指数を補間すれば回転のみの補間ができる

$$\hat{\mathbf{q}}_t = \hat{\mathbf{q}}_0^{(1-t)} \hat{\mathbf{q}}_1^t \quad (t \in [0, 1])$$

- 単位四元数のべき乗は回転角を指数倍したもの
- 単位四元数の積は（回転）変換の合成
  - $t \to 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{q}}_{t=0} = \hat{\mathbf{q}}_0$
  - $t \to 1 \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{q}}_{t=1} = \hat{\mathbf{q}}_1$



球面線形補間 (Spherical Linear interpolation, Slerp)

- $\hat{\mathbf{q}}_0^{(1-t)}\hat{\mathbf{q}}_1^t = \hat{\mathbf{q}}_0\hat{\mathbf{q}}_0^{-t}\hat{\mathbf{q}}_1^t = \hat{\mathbf{q}}_0(\hat{\mathbf{q}}_0^{-1}\hat{\mathbf{q}}_1)^t = \mathrm{slerp}(\hat{\mathbf{q}}_0, \hat{\mathbf{q}}_1, t)$ とすると

$$\mathrm{slerp}(\hat{\mathbf{q}}_0, \hat{\mathbf{q}}_1, t) = \frac{\sin\{\phi(1-t)\}}{\sin\phi}\hat{\mathbf{q}}_0 + \frac{\sin(\phi t)}{\sin\phi}\hat{\mathbf{q}}_1$$

- ここで

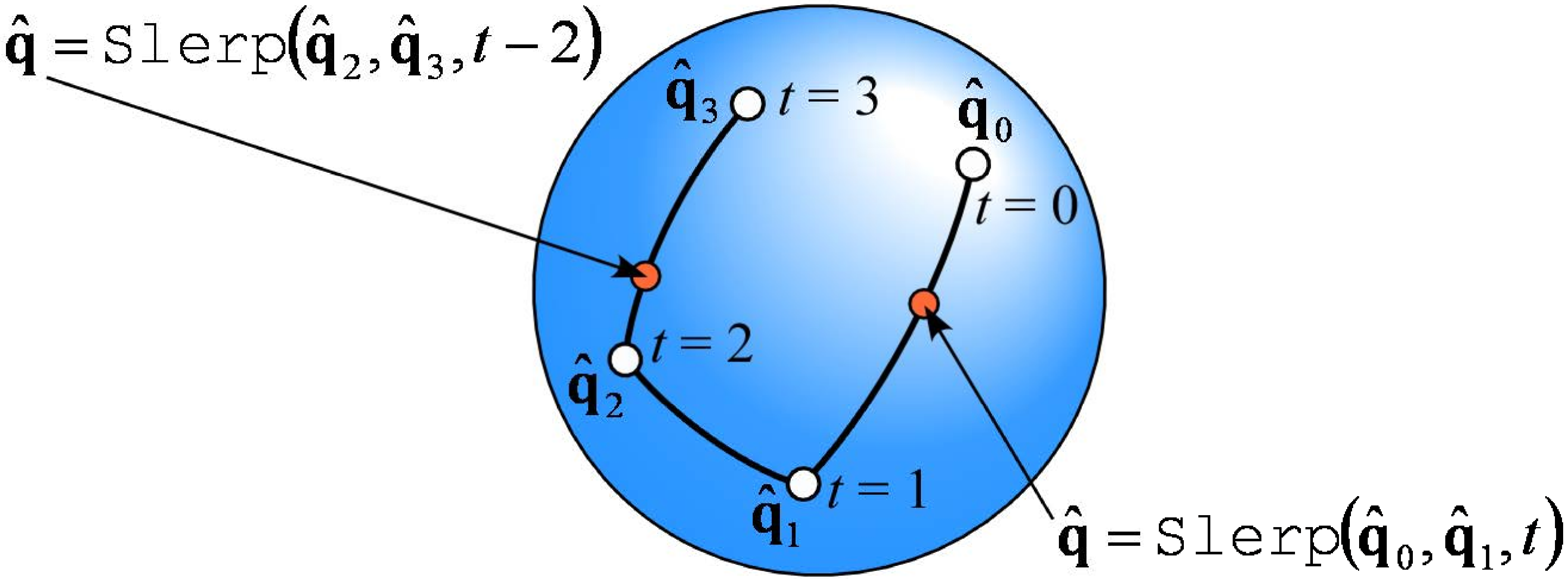
$$\cos\phi = \hat{\mathbf{q}}_0 \cdot \hat{\mathbf{q}}_1 = q_{0_x}q_{1_x} + q_{0_y}q_{1_y} + q_{0_z}q_{1_z} + q_{0_w}q_{1_w}$$
$$\phi = \cos^{-1}(\hat{\mathbf{q}}_0 \cdot \hat{\mathbf{q}}_1)$$
$$\sin\phi = \sqrt{1-(\hat{\mathbf{q}}_0 \cdot \hat{\mathbf{q}}_1)^2}$$

球面線形補間のサンプルコード

```
#include <cmath>

/*
** p ← q と r を t で補間
*/
void slerp(float* p,
  const float* q,
  const float* r,
  float t)
{
  const auto qr{
    q[0] * r[0] +
    q[1] * r[1] +
    q[2] * r[2] +
    q[3] * r[3]
  };
  const auto ss{ 1.0f - qr * qr };
```

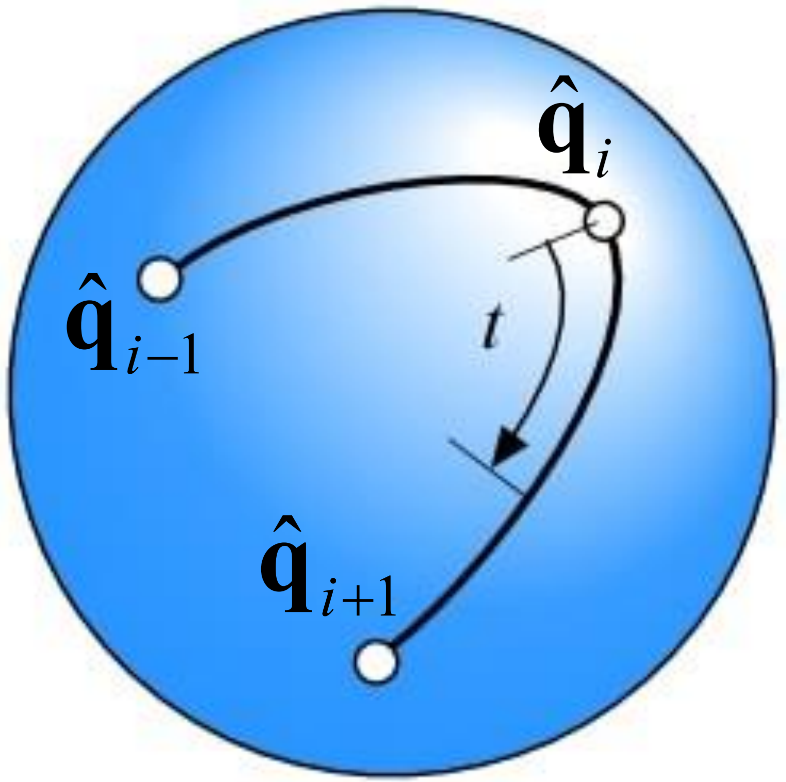
```
  if (ss == 0.0) {
    p[0] = q[0];
    p[1] = q[1];
    p[2] = q[2];
    p[3] = q[3];
  }
  else {
    const auto sp{ sqrt(ss) };
    const auto ph{ acos(qr) };
    const auto pt{ ph * t };
    const auto t1{ sin(pt) / sp };
    const auto t0{ sin(ph - pt) / sp };

    p[0] = q[0] * t0 + r[0] * t1;
    p[1] = q[1] * t0 + r[1] * t1;
    p[2] = q[2] * t0 + r[2] * t1;
    p[3] = q[3] * t0 + r[3] * t1;
  }
}
```

３個以上の四元数の補間



区間 $[\hat{\mathbf{q}}_i, \hat{\mathbf{q}}_{i+1}]$ において $\hat{\mathbf{q}} = \mathtt{Slerp}(\hat{\mathbf{q}}_i, \hat{\mathbf{q}}_{i+1}, t-i)$

四元数のスプライン補間



$$\hat{\mathbf{a}}_i = \hat{\mathbf{q}}_i \exp\left(-\frac{\log\left(\hat{\mathbf{q}}_i^{-1}\hat{\mathbf{q}}_{i-1}\right) + \log\left(\hat{\mathbf{q}}_i^{-1}\hat{\mathbf{q}}_{i+1}\right)}{4}\right)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{squad}(\hat{\mathbf{q}}_i, \hat{\mathbf{q}}_{i+1}, \hat{\mathbf{a}}_i, \hat{\mathbf{a}}_{i+1}, t) \\ &= \mathrm{slerp}\left(\mathrm{slerp}(\hat{\mathbf{q}}_i, \hat{\mathbf{q}}_{i+1}, t),\ \mathrm{slerp}(\hat{\mathbf{a}}_i, \hat{\mathbf{a}}_{i+1}, t), 2t(1-t)\right)\end{aligned}$$

小テスト－四元数による回転

Moodle の小テストに解答してください

宿題

- 球面線形補間を使ってアニメーションに回転のアニメーションを加えてください
  - 次のプログラムは線画の立方体を平行移動するアニメーションを表示します
    - https://github.com/tokoik/ggsample04
  - この起点で立方体を (1, 0, 0) を軸に 1 ラジアン回転し，そこから終点において (0, 0, 1) を軸に 2 ラジアン回転した状態に至る回転のアニメーションを加えてください
    - 軸と回転角から単位四元数を求める関数を作成してください
    - 単位四元数を球面線形補間する関数を作成してください
    - 単位四元数から回転変換行列を求める関数を作成してください
- ggsample04.cpp を**アップロード**してください

結果

このような画像が表示されれば、多分、正解です。