第8章 四元数

8.1 四元数の表記

四元数 (しげんすう) quaternion (クォータニオン) とは、簡単に言うと、複素数の虚軸を三次元に拡張したものです。複素数は a, b を実数、i を虚数単位として、$a + bi$ のように表されます。四元数はこれと同様に、w, x, y, z を実数、i, j, k を虚数単位として、$w + xi + yj + zk$ のように表されます。ここでは四元数 $\hat{\mathbf{q}}$ を、q_x, q_y, q_z, q_w を実数として、次のように表記するものとします。

$$\hat{\mathbf{q}} = (q_x, q_y, q_z, q_w) \tag{25}$$

ここで (q_x, q_y, q_z) をベクトル $\mathbf{q}_v$ で表すと、次のように書くことができます。

$$\mathbf{q}_v = (q_x, q_y, q_z) \tag{26}$$

したがって、$\hat{\mathbf{q}}$ は次のように書くこともできます。

$$\hat{\mathbf{q}} = (\mathbf{q}_v, q_w) \tag{27}$$

8.2 四元数の定義

四元数 $\hat{\mathbf{q}}$ は次のように定義されます。

$$\hat{\mathbf{q}} = (\mathbf{q}_v, q_w) = iq_x + jq_y + kq_z + q_w \tag{28}$$

ここで、ベクトル $\mathbf{q}_v$ を次のように定義します。

$$\mathbf{q}_v = (q_x, q_y, q_z) = (iq_x + jq_y + kq_z) \tag{29}$$

このとき、四元数 $\hat{\mathbf{q}}$ はベクトル $\mathbf{q}_v$ とスカラー q_w の和で表すことができます。

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_v + q_w \tag{30}$$

ここで虚数単位 i, j, k には、次の性質があります。

$$
\begin{aligned}
&i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \\
&jk = -kj = i,\ ki = -ik = j,\ ij = -ji = k
\end{aligned}
\tag{31}
$$

8.3 四元数の演算

8.3.1 積

四元数同士の積は、四元数の定義から、次のようにして求めることができます。

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{r}} &= (iq_x + jq_y + kq_z + q_w)(ir_x + jr_y + kr_z + r_w) \\
&= i(q_y r_z - q_z r_y + r_w q_x + q_w r_x) \\
&+ j(q_z r_x - q_x r_z + r_w q_y + q_w r_y) \\
&+ j(q_x r_y - q_y r_x + r_w q_z + q_w r_z) \\
&+ q_w r_w - q_x r_x - q_y r_y - q_z r_z \\
&= (\mathbf{q}_v \times \mathbf{r}_v + r_w \mathbf{q}_v + q_w \mathbf{r}_v, q_w r_w - \mathbf{q}_v \cdot \mathbf{r}_v)
\end{aligned}
\tag{32}
$$

これを求める手続きの C 言語による例を、以下に示します。この関数 qmul() の引数 p, q, r は四元数の x, y, z, w をこの順に格納した 4 要素の配列で、q と r の積を p に求めます。

```
/*
** p <- q * r
*/
void qmul(float *p, const float *q, const float *r)
{
  p[0] = q[1]*r[2] - q[2]*r[1] + r[3]*q[0] + q[3]*r[0];
  p[1] = q[2]*r[0] - q[0]*r[2] + r[3]*q[1] + q[3]*r[1];
  p[2] = q[0]*r[1] - q[1]*r[0] + r[3]*q[2] + q[3]*r[2];
  p[3] = q[3]*r[3] - q[0]*r[0] - r[1]*q[1] - q[2]*r[2];
}
```

8.3.2 和

四元数同士の和は、その要素ごとの和で求めることができます。

$$
\hat{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{r}} = (\mathbf{q}_v, q_w) + (\mathbf{r}_v, r_w) = (\mathbf{q}_v + \mathbf{r}_v, q_w + r_w) \tag{33}
$$

8.3.3 共役

四元数の共役は、複素数の共役同様、虚部の符号を反転したものになります。四元数では、虚部はベクトルなので、逆向きのベクトルになります。

$$
\hat{\mathbf{q}}^* = (\mathbf{q}_v, q_w)^* = (-\mathbf{q}_v, q_w) \tag{34}
$$

8.3.4 ノルム

ノルムは四元数の「長さ」で、各要素の平方の和の平方根で求めることができます。

$$
n(\hat{\mathbf{q}}) = \sqrt{\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{q}}^*} = \sqrt{\hat{\mathbf{q}}^*\hat{\mathbf{q}}} = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 + q_w^2} \tag{35}
$$

8.3.5 単位元

四元数に単位元の四元数を掛けた結果は、もとの四元数と等しいものになります。

$$\hat{\mathbf{i}} = (\mathbf{0}, 1) \tag{36}$$

(32) 式において $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{i}}$ とすれば、次のようになります。

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{i}} &= (\mathbf{q}_v \times \mathbf{r}_v + r_w\mathbf{q}_v + q_w\mathbf{r}_v, q_w r_w - \mathbf{q}_v \cdot \mathbf{r}_v) \\
&= (\mathbf{q}_v \times \mathbf{0} + 1\mathbf{q}_v + q_w\mathbf{0}, q_w 1 - \mathbf{q}_v \cdot \mathbf{0}) \\
&= (\mathbf{q}_v, q_w) = \hat{\mathbf{q}}
\end{aligned} \tag{37}$$

8.3.6 逆元

四元数に逆元の四元数を乗じると、単位元の四元数になります。

$$n(\hat{\mathbf{q}}) = \sqrt{\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{q}}^*} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{q}}^*}}{n(\hat{\mathbf{q}})} = 1 \tag{38}$$

(38) 式の右側の両辺を二乗し $\hat{\mathbf{q}}$ で割れば、$\hat{\mathbf{q}}$ の逆元 $\hat{\mathbf{q}}^{-1} = 1/\hat{\mathbf{q}}$ が得られます。すなわち、ある四元数の逆元は、その四元数の共役四元数をノルムの二乗で割ったものになります。

$$\hat{\mathbf{q}}^{-1} = \frac{\hat{\mathbf{q}}^*}{|n(\hat{\mathbf{q}})|^2} \tag{39}$$

8.4 四元数の公式と法則

8.4.1 共役の公式

ある四元数の共役四元数の共役は、元の四元数になります。

$$(\hat{\mathbf{q}}^*)^* = \hat{\mathbf{q}} \tag{40}$$

二つの四元数の和の共役は、それぞれの共役四元数の和になります。

$$(\hat{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{r}})^* = \hat{\mathbf{q}}^* + \hat{\mathbf{r}}^* \tag{41}$$

二つの四元数の積の共役は、それぞれの共役四元数を逆順に掛けたものになります。

$$(\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{r}})^* = \hat{\mathbf{r}}^*\hat{\mathbf{q}}^* \tag{42}$$

8.4.2 ノルムの公式

ある四元数の共役四元数のノルムは、元の四元数のノルムと等しくなります。

$$n(\hat{\mathbf{q}}^*) = n(\hat{\mathbf{q}}) \tag{43}$$

二つの四元数の積のノルムは、それぞれの四元数のノルムの積と等しくなります。

$$n(\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{r}}) = n(\hat{\mathbf{q}})n(\hat{\mathbf{r}}) \tag{44}$$

8.4.3 積の公式

四元数の積には複素数の積と同様に、線形性があります。

$$\hat{\mathbf{p}}(s\hat{\mathbf{q}}+t\hat{\mathbf{r}}) = s\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{q}}+t\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{r}} \tag{45}$$

同様に、四元数の積は結合法則を満たします。

$$\hat{\mathbf{p}}(\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{r}}) = (\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{q}})\hat{\mathbf{r}} \tag{46}$$

8.5 単位四元数

8.5.1 単位四元数の定義

単位四元数は、ノルム (長さ) が 1 の四元数です。

$$n(\hat{\mathbf{q}}) = 1 \tag{47}$$

次のような四元数 $\hat{\mathbf{q}}$ を考えます。ϕ は実数、$\mathbf{u}_q$ は $\|\mathbf{u}_q\| = 1$ のベクトル、すなわち単位ベクトルです。

$$\hat{\mathbf{q}} = (\sin\phi\,\mathbf{u}_q, \cos\phi) = \sin\phi\,\mathbf{u}_q + \cos\phi \tag{48}$$

この四元数 $\hat{\mathbf{q}}$ のノルムは 1 になります。

$$n(\hat{\mathbf{q}}) = n(\sin\phi\,\mathbf{u}_q, \cos\phi) = \sqrt{\sin^2\phi(\mathbf{u}_q\cdot\mathbf{u}_q)+\cos^2\phi} = \sqrt{\sin^2\phi+\cos^2\phi} = 1 \tag{49}$$

さらに、オイラーの公式 $\cos\phi + i\sin\phi = e^{i\phi}$ をもとに、四元数 $\hat{\mathbf{q}}$ は次のように表すこともできます。

$$\hat{\mathbf{q}} = \sin\phi\,\mathbf{u}_q + \cos\phi = e^{\phi\mathbf{u}_q} \tag{50}$$

8.5.2 単位四元数の対数

単位四元数の対数は、(50) 式より、単位ベクトル $\mathbf{u}_q$ を ϕ 倍したものになります。

$$\log\hat{\mathbf{q}} = \log(e^{\phi\mathbf{u}_q}) = \phi\mathbf{u}_q \tag{51}$$

8.5.3 単位四元数の指数

単位四元数の指数は、(50) 式より、ϕ を指数倍したものになります。

$$\hat{\mathbf{q}}^t = (\sin\phi\,\mathbf{u}_q + \cos\phi)^t = e^{\phi t\mathbf{u}_q} = \sin\phi t\,\mathbf{u}_q + \cos\phi t \tag{52}$$

8.5.4 単位四元数の逆元

単位四元数の逆元は、(39) 式においてノルム $n(\hat{\mathbf{q}}) = 1$ のため、その共役四元数になります。

$$\hat{\mathbf{q}}^{-1} = \frac{\hat{\mathbf{q}}^*}{|n(\hat{\mathbf{q}})|^2} = \hat{\mathbf{q}}^* \tag{53}$$

8.5.5 単位四元数による回転の変換

いま、$\mathbf{p}$ を同次座標で表された三次元空間上の位置であるとします。

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ p_w \end{pmatrix} \tag{54}$$

これを、そのまま四元数 $\hat{\mathbf{p}}$ として扱います。これは、ベクトル $\mathbf{p}_v = (p_x, p_y, p_z)$ として、次のように表現することができます。

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}} &= (\mathbf{p}_v, p_w) \\ \mathbf{p}_v &= (p_x, p_y, p_z) \end{aligned} \tag{55}$$

ここで $\hat{\mathbf{q}}$ を単位四元数とします。

$$\hat{\mathbf{q}} = (\sin\phi\,\mathbf{u}_q, \cos\phi) = \sin\phi\,\mathbf{u}_q + \cos\phi \tag{56}$$

すると、次の演算の結果 $\hat{\mathbf{p}}'$ は、図 100 のように、$\hat{\mathbf{p}}$ を $\mathbf{u}_q$ を軸として 2ϕ 回転したものになります。

$$\hat{\mathbf{p}}' = \hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{q}}^{-1} \tag{57}$$

単位四元数では $\hat{\mathbf{p}}^{-1} = \hat{\mathbf{p}}^*$ ですから、これは次のように書くこともできます。

$$\hat{\mathbf{p}}' = \hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{q}}^* \tag{58}$$

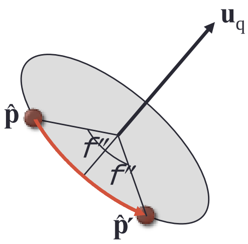

図 100 単位四元数による回転

なお、$\hat{\mathbf{q}}$ と $-\hat{\mathbf{q}}$ は同じ回転を表します。

$$\hat{\mathbf{p}}' = (-\hat{\mathbf{q}})\hat{\mathbf{p}}(-\hat{\mathbf{q}}^*) = \hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{q}}^* \tag{59}$$

● X 軸中心の回転

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}_x(\theta) &= \left(\sin\frac{\theta}{2},\ 0,\ 0,\ \cos\frac{\theta}{2}\right) \\ &= i\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2} \end{aligned} \tag{60}$$

● Y 軸中心の回転

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{q}}_y(\theta) &= \left(0,\ \sin\frac{\theta}{2},\ 0,\ \cos\frac{\theta}{2}\right) \\
&= j\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}
\end{aligned} \tag{61}
$$

● Z 軸中心の回転

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{q}}_z(\theta) &= \left(0,\ 0,\ \sin\frac{\theta}{2},\ \cos\frac{\theta}{2}\right) \\
&= k\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}
\end{aligned} \tag{62}
$$

● 回転軸と角度から単位四元数を求める手続き

回転軸と角度から、その回転を表す単位四元数を求める手続きの C 言語による例を、以下に示します。この関数 qmake() は、引数 x, y, z を軸に a 回転する単位四元数を、引数 q に指定された配列に求めます。

```
/*
** q <- 軸(x, y, z) 角度(a)
*/
void qmake(float *q, float x, float y, float z, float a)
{
  float l = x * x + y * y + z * z;

  if (l != 0.0f) {
    float s = sin(a *= 0.5f) / sqrt(l);

    q[0] = x * s;
    q[1] = y * s;
    q[2] = z * s;
    q[3] = cos(a);
  }
}
```

8.5.6 単位四元数による変換の合成

単位四元数 $\hat{\mathbf{q}}$ による回転の後、単位四元数 $\hat{\mathbf{r}}$ による回転を行うことを考えます。

$$
\hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{q}}^*)\hat{\mathbf{r}}^* = (\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{q}})\hat{\mathbf{p}}(\hat{\mathbf{q}}^*\hat{\mathbf{r}}^*) = (\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{q}})\hat{\mathbf{p}}(\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{q}})^* \tag{63}
$$

したがって、単位四元数 $\hat{\mathbf{r}}$ と $\hat{\mathbf{q}}$ の積 $\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{q}}$ は、この二つの単位四元数が表す回転を合成したものになります。

一般に変換の合成は行列の積で表されますが、変換の合成を繰り返すと誤差が累積してしまいます。特に剛体変換においては、回転を繰り返すなどして誤差が累積すると、対象形状が変形してしまうことがあります。

単位四元数による回転の変換では、合成した変換をそのノルムで割って正規化することにより、少なくとも回転の変換であることは維持されるため、対象形状の変形を避けることができます。

8.5.7　単位四元数から回転変換行列の算出

四元数 $\hat{\mathbf{q}} = (q_x, q_y, q_z, q_w)$ が表す変換は、次の行列で表されます。

$$\mathbf{M}^q = \begin{pmatrix} 1 - s(q_y^2 + q_z^2) & s(q_x q_y - q_w q_z) & s(q_z q_x + q_w q_y) & 0 \\ s(q_x q_y + q_w q_z) & 1 - s(q_z^2 + q_x^2) & s(q_y q_z - q_w q_x) & 0 \\ s(q_z q_x - q_w q_y) & s(q_y q_z + q_w q_x) & 1 - s(q_x^2 + q_y^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{64}$$

ここで $s = 2/n(\hat{\mathbf{q}})$ なので、$\hat{\mathbf{q}}$ が単位四元数なら、これは次のようになります。

$$\mathbf{M}^q = \begin{pmatrix} 1 - 2(q_y^2 + q_z^2) & 2(q_x q_y - q_w q_z) & 2(q_z q_x + q_w q_y) & 0 \\ 2(q_x q_y + q_w q_z) & 1 - 2(q_z^2 + q_x^2) & 2(q_y q_z - q_w q_x) & 0 \\ 2(q_z q_x - q_w q_y) & 2(q_y q_z + q_w q_x) & 1 - 2(q_x^2 + q_y^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{65}$$

したがって、回転の変換に関しては、それを表す四元数を求めてしまえば、その合成や、合成の結果から変換行列を求める際にも、三角関数は不要です。

● 単位四元数から回転変換行列を算出する手続き

単位四元数から、その回転を表す変換行列を求める手続きの C 言語による例を、以下に示します。この関数 qrot() は、引数 q で与えられた単位四元数が表す回転の変換行列を、引数 m に指定された配列に格納します。

```
/*
** 回転変換行列 m <- 単位四元数 q
*/
void qrot(float *m, const float *q)
{
  float xx = q[0] * q[0] * 2.0f;
  float yy = q[1] * q[1] * 2.0f;
  float zz = q[2] * q[2] * 2.0f;
  float xy = q[0] * q[1] * 2.0f;
  float yz = q[1] * q[2] * 2.0f;
  float zx = q[2] * q[0] * 2.0f;
  float xw = q[0] * q[3] * 2.0f;
  float yw = q[1] * q[3] * 2.0f;
  float zw = q[2] * q[3] * 2.0f;

  m[ 0] = 1.0f - yy - zz;
  m[ 1] = xy + zw;
  m[ 2] = zx - yw;
  m[ 4] = xy - zw;
  m[ 5] = 1.0f - zz - xx;
  m[ 6] = yz + xw;
  m[ 8] = zx + yw;
  m[ 9] = yz - xw;
  m[10] = 1.0f - xx - yy;
  m[ 3] = m[ 7] = m[11] =
  m[12] = m[13] = m[14] = 0.0f;
  m[15] = 1.0f;
}
```

8.5.8 直交行列から単位四元数を求める

直交行列 $\mathbf{M}^q$ を次のようにおくことを考えます。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}^q &= \begin{pmatrix} m^q_{00} & m^q_{01} & m^q_{02} & m^q_{03} \\ m^q_{10} & m^q_{11} & m^q_{12} & m^q_{13} \\ m^q_{20} & m^q_{21} & m^q_{22} & m^q_{23} \\ m^q_{30} & m^q_{31} & m^q_{32} & m^q_{33} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1-2(q_y^2+q_z^2) & 2(q_xq_y-q_wq_z) & 2(q_zq_x+q_wq_y) & 0 \\ 2(q_xq_y+q_wq_z) & 1-2(q_z^2+q_x^2) & 2(q_yq_z-q_wq_x) & 0 \\ 2(q_zq_x-q_wq_y) & 2(q_yq_z+q_wq_x) & 1-2(q_x^2+q_y^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{66}
$$

このトレース (対角要素の総和) は次のようになります。

$$tr(\mathbf{M}^q) = \sum_{i=0}^{3} m^q_{ii} = m_{00} + m_{11} + m_{22} + m_{33} = 4 - 4(q_x^2 + q_y^2 + q_z^2) = 4q_w^2 \tag{67}$$

したがって、q_w は次式で得られます。

$$q_w = \frac{1}{2}\sqrt{tr(\mathbf{M}^q)} \tag{68}$$

これをもとに、q_x, q_y, q_z は以下のように求めることができます。

$$q_x = \frac{m^q_{21} - m^q_{12}}{4q_w} \tag{69}$$

$$q_y = \frac{m^q_{02} - m^q_{20}}{4q_w} \tag{70}$$

$$q_z = \frac{m^q_{10} - m^q_{01}}{4q_w} \tag{71}$$

なお、q_x, q_y, q_z は次式により求めることもできます。

$$
\begin{aligned}
q_x &= \frac{1}{2}\sqrt{+m^q_{00} - m^q_{11} - m^q_{22} + m^q_{33}} \\
q_y &= \frac{1}{2}\sqrt{-m^q_{00} + m^q_{11} - m^q_{22} + m^q_{33}} \\
q_z &= \frac{1}{2}\sqrt{-m^q_{00} - m^q_{11} + m^q_{22} + m^q_{33}}
\end{aligned} \tag{72}
$$

8.6 二つのベクトルで表される回転

二つのベクトル $\mathbf{s}$ と $\mathbf{t}$ が与えられているとき、$\mathbf{s}$ の向きから $\mathbf{t}$ の向きに回転する変換を求めます。この二つのベクトルの外積を正規化したものを $\mathbf{u}$ とし、この二つのベクトルのなす角を 2ϕ とします。

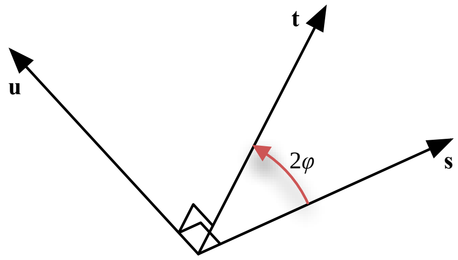

図 101 二つのベクトルで表される回転

この回転を表す単位四元数を $\hat{\mathbf{q}}$ とします。$\mathbf{u}$ はこの回転の回転軸になります。

$$\hat{\mathbf{q}} = (\sin\phi\mathbf{u}, \cos\phi) \tag{102}$$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{s}\times\mathbf{t}}{\|\mathbf{s}\times\mathbf{t}\|} \tag{103}$$

この分母は $\|\mathbf{s}\times\mathbf{t}\| = \sin 2\phi = 2\sin\phi\cos\phi$ ですから、(102) 式は次のように書き換えられます。

$$\hat{\mathbf{q}} = \left(\frac{\sin\phi}{\sin 2\phi}\mathbf{s}\times\mathbf{t}, \cos\phi\right) = \left(\frac{1}{2\cos\phi}\mathbf{s}\times\mathbf{t}, \cos\phi\right) \tag{104}$$

ここで $\mathbf{s}\cdot\mathbf{t} = \cos 2\phi = 2\cos^2\phi - 1 = e$ とおきます。

$$\cos\phi = \sqrt{\frac{1+e}{2}} \tag{105}$$

$$\hat{\mathbf{q}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2(1+e)}}\mathbf{s}\times\mathbf{t}, \frac{\sqrt{2(1+e)}}{2}\right) \tag{106}$$

これより、この回転の変換行列 $\mathbf{R}(\mathbf{s},\mathbf{t})$ は次式により求めることができます。

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}(\mathbf{s},\mathbf{t}) &= \begin{pmatrix} e + hu_x^2 & hu_xu_y - u_z & hu_zu_x + u_y & 0 \\ hu_xu_y + u_z & e + hu_y^2 & hu_yu_z - u_x & 0 \\ hu_zu_x - u_y & hu_yu_z + u_x & e + hu_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{u} &= (u_x, u_y, u_z) = \frac{\mathbf{s}\times\mathbf{t}}{\|\mathbf{s}\times\mathbf{t}\|} \\
e &= \cos 2\phi = \mathbf{s}\cdot\mathbf{t} \\
h &= \frac{1-\cos 2\phi}{\sin^2 2\phi} = \frac{1-e}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}
\end{aligned} \tag{107}$$