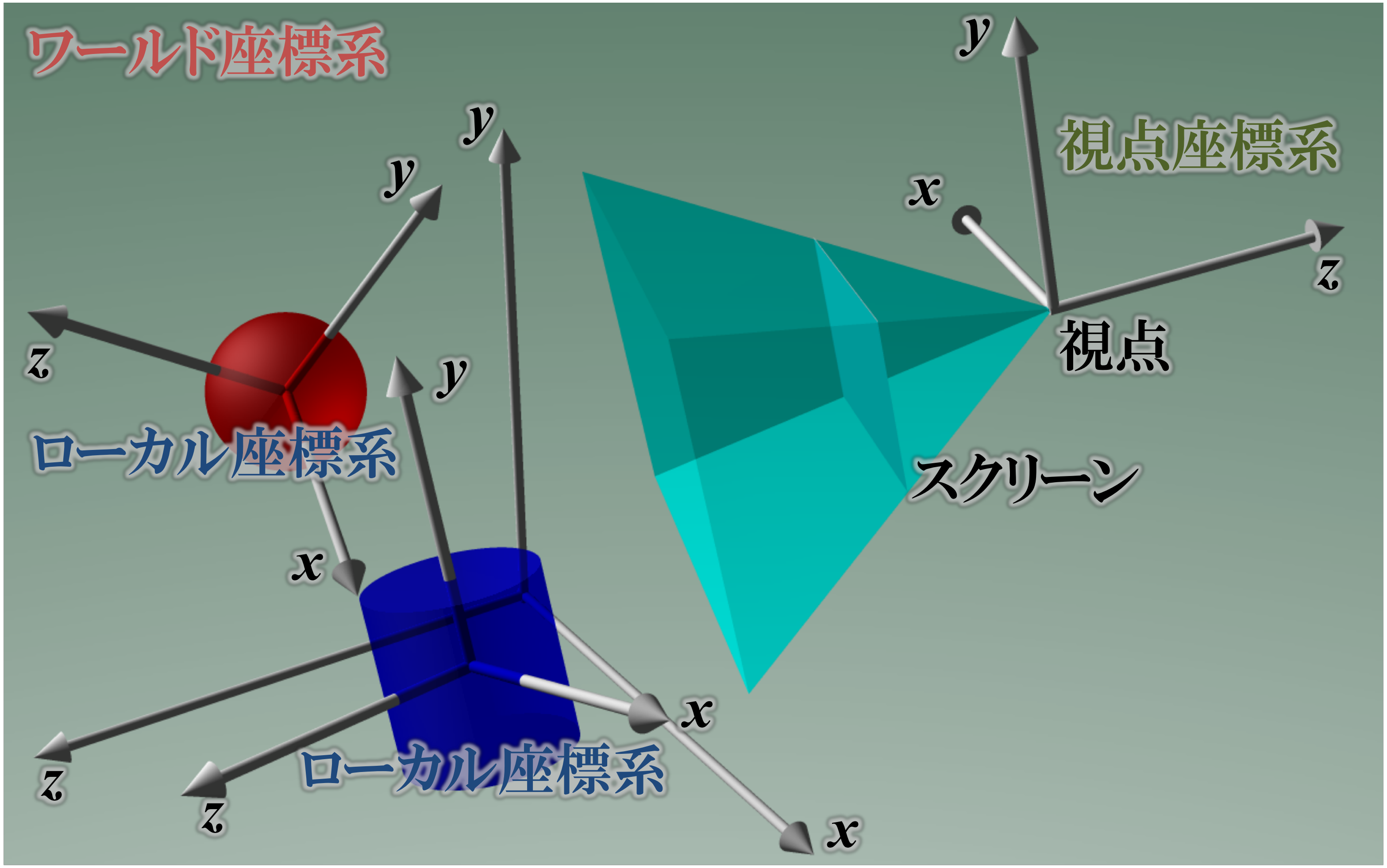
コンピュータグラフィックス

第7回：空間に立体を配置する

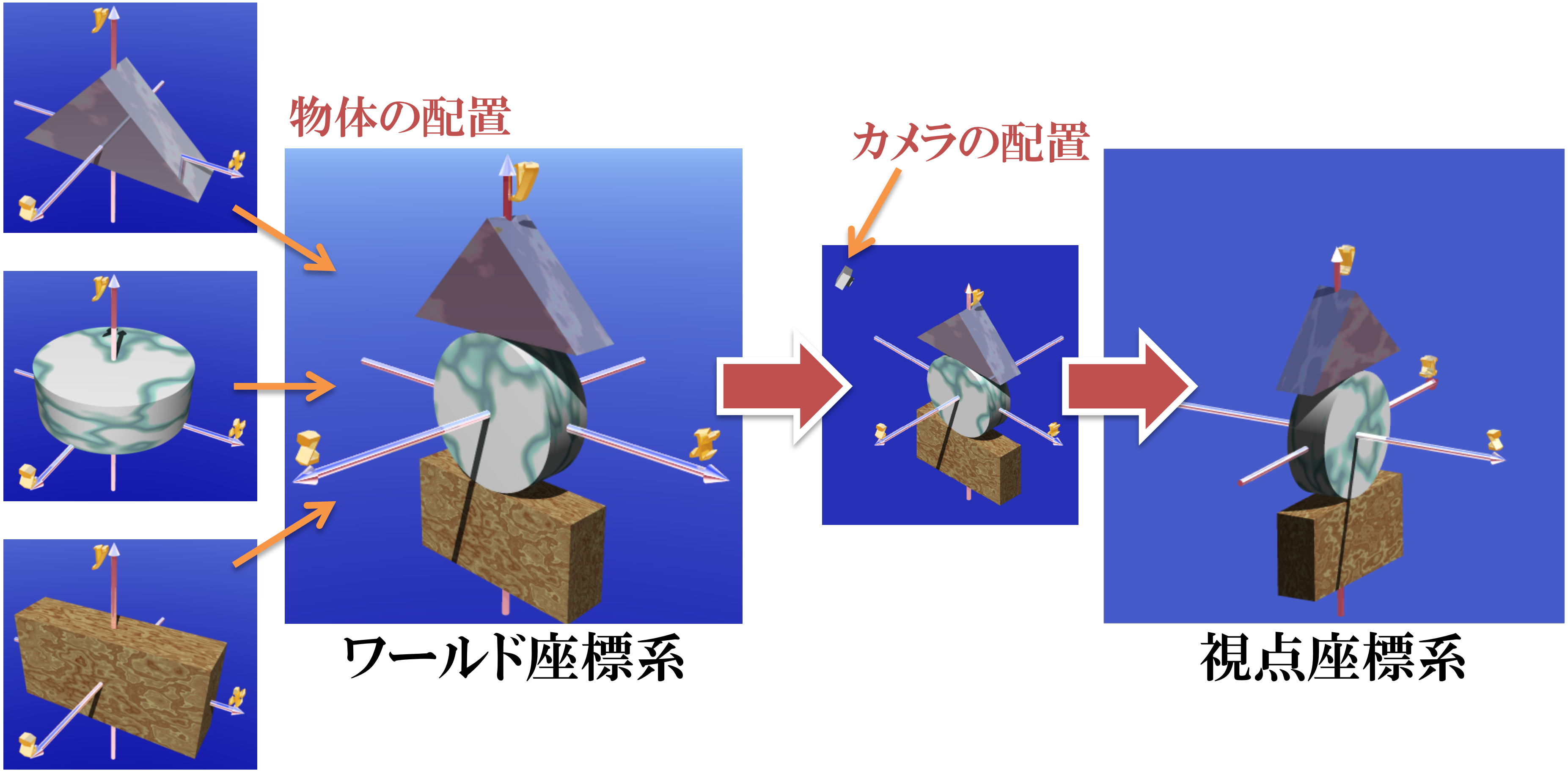
視点とスクリーン



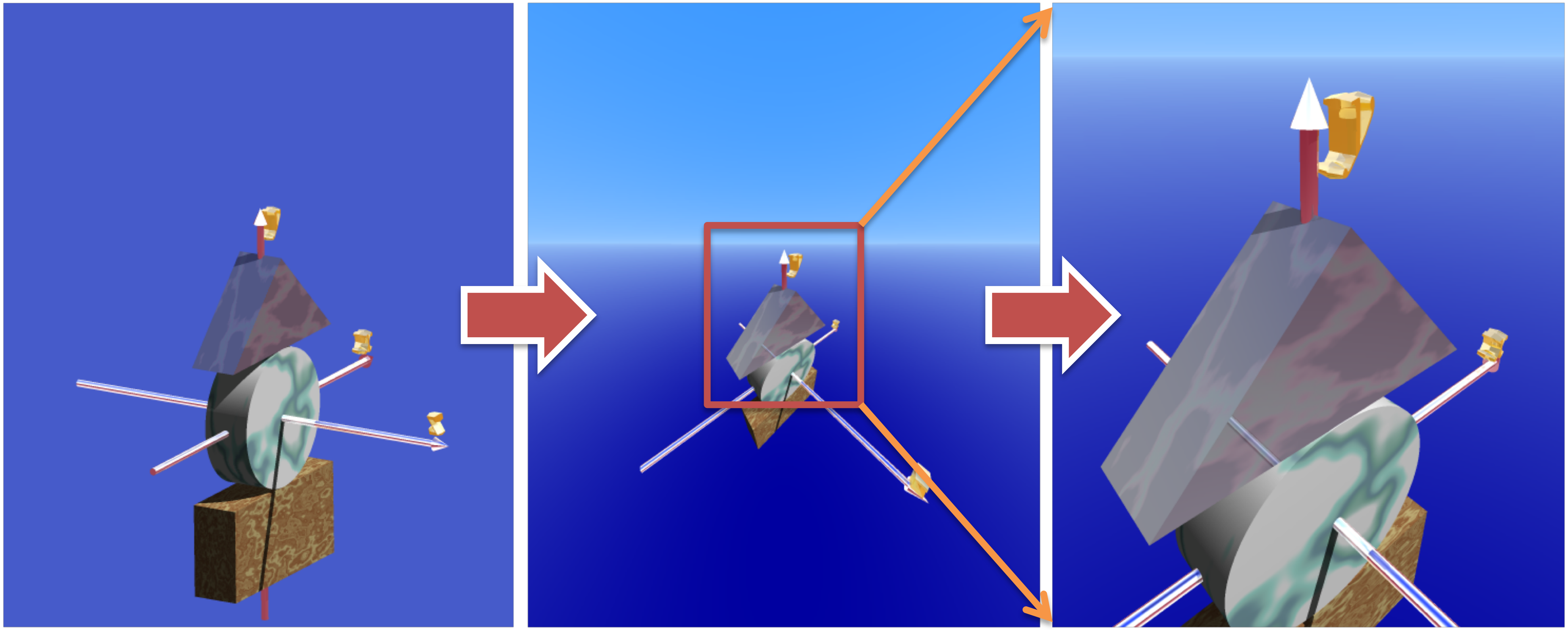
図形表示の手順

- 物体の配置
  - モデル変換（モデリング変換）
- 視点の移動
  - ビュー変換（ビューイング変換，視野変換）
- スクリーンへの投影
  - 投影変換
- 画面からはみ出る部分の切り取り
  - クリッピング
- 画面へのはめ込み
  - ビューポート変換（スクリーンマッピング）

物体の配置と視点の移動

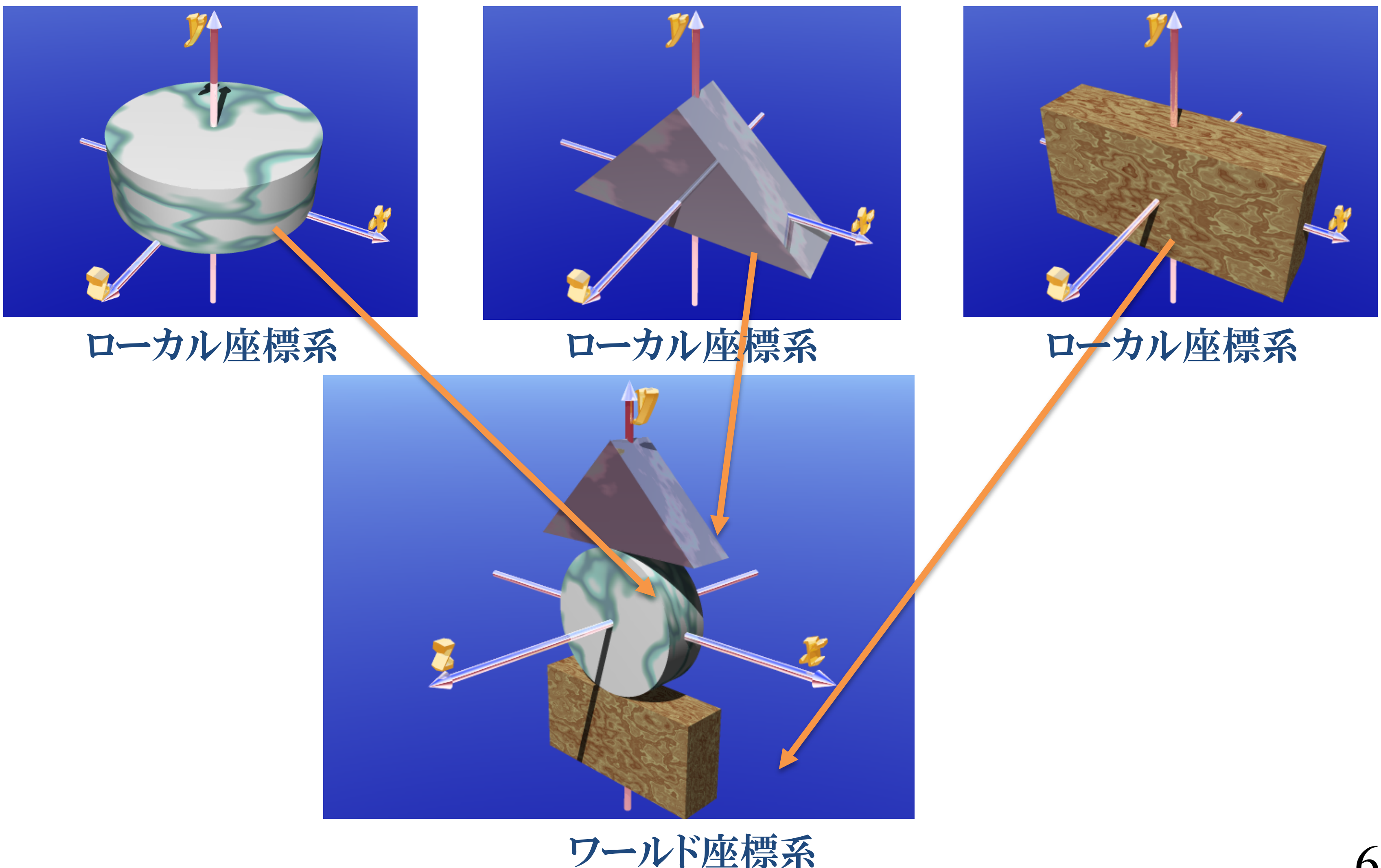


投影とクリッピング

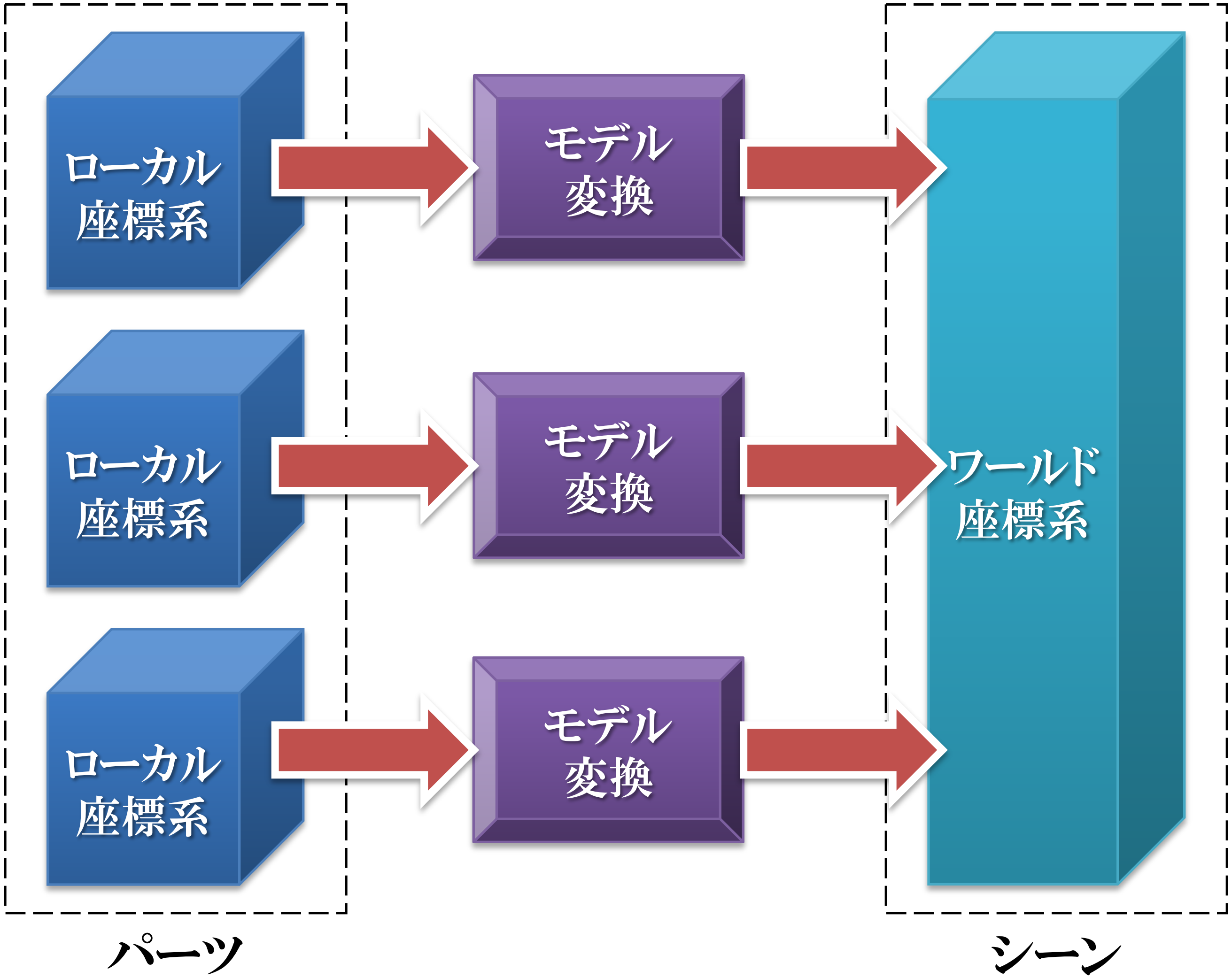


視点座標系　　スクリーン座標系　　クリッピング座標系

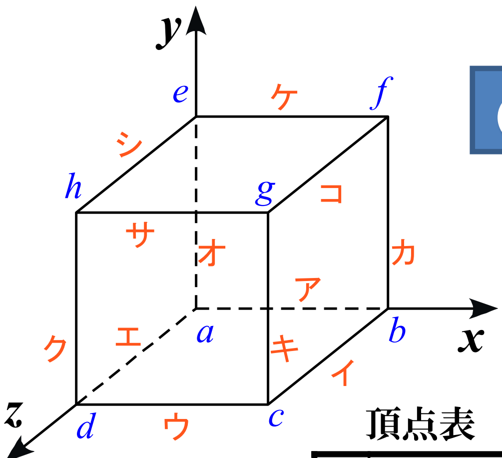
物体の配置



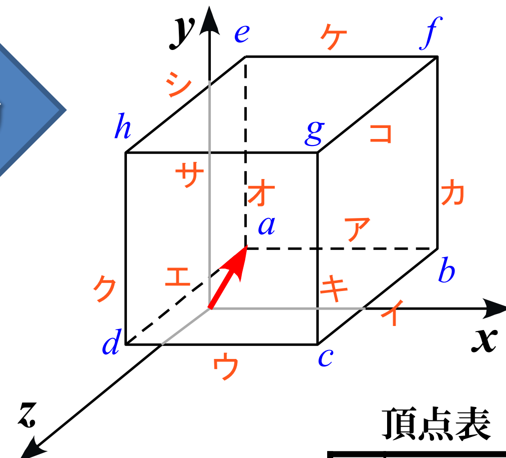
モデル変換



座標変換



(1, 1, 1) に平行移動



頂点表

頂点	座標値		
	x	y	z
a	0	0	0
b	1	0	0
c	1	0	1
d	0	0	1
e	0	1	0
f	1	1	0
g	1	1	1
h	0	1	1

稜線表

稜線	頂点	
	始点	終点
ア	a	b
イ	b	c
ウ	c	d
エ	d	a
オ	a	e
カ	b	f
キ	c	g
ク	d	h
ケ	e	f
コ	f	g
サ	g	h
シ	h	e

頂点表

頂点	座標値		
	x	y	z
a	1	1	1
B	2	1	1
C	2	1	2
D	1	1	2
E	1	2	1
F	2	2	1
G	2	2	2
H	1	2	2

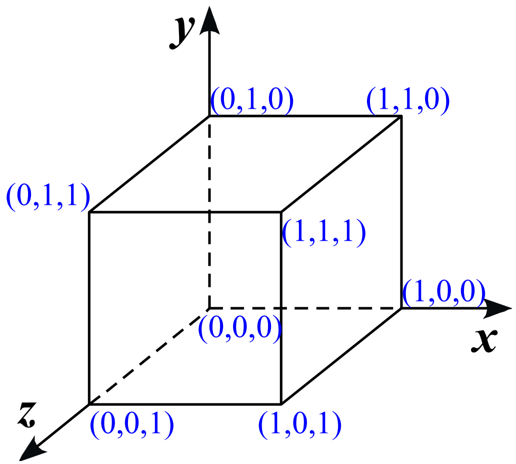
変更

不変

稜線表

稜線	頂点	
	始点	終点
ア	a	b
イ	b	c
ウ	c	d
エ	d	a
オ	a	e
カ	b	f
キ	c	g
ク	d	h
ケ	e	f
コ	f	g
サ	g	h
シ	h	e

平行移動



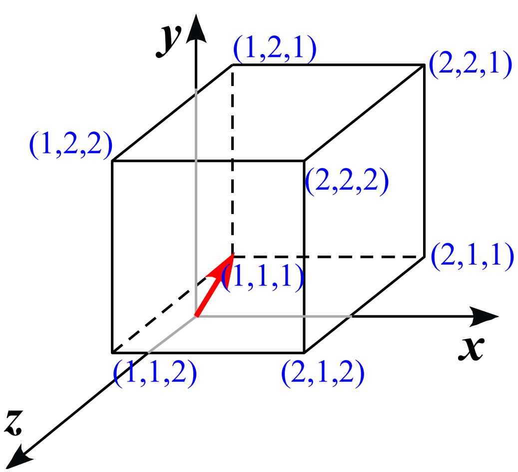
(x, y, z) 平行移動前の座標値

(x', y', z') 平行移動後の座標値

(b_x, b_y, b_z) 平行移動量

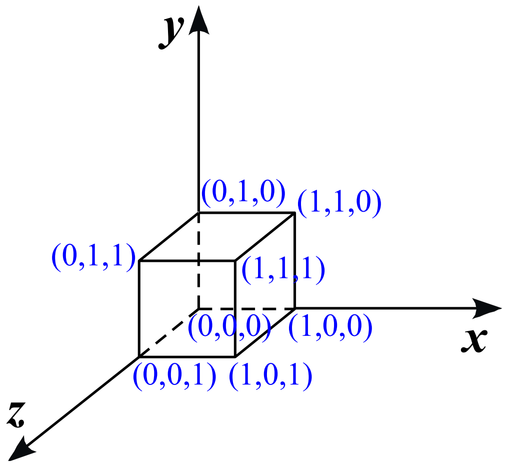
(1,1,1) に平行移動

$$(b_x, b_y, b_z) = (1,1,1)$$



$$x' = x + b_x$$
$$y' = y + b_y$$
$$z' = z + b_z$$

拡大縮小



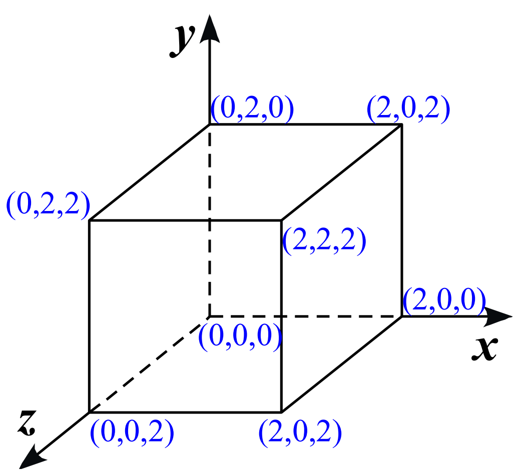
$\left(x, y, z\right)$ 拡大縮小前の座標値

$\left(x', y', z'\right)$ 拡大縮小後の座標値

$\left(a_x, a_y, a_z\right)$ 拡大縮小率

2倍に拡大

$$\left(a_x, a_y, a_z\right) = \left(2,2,2\right)$$

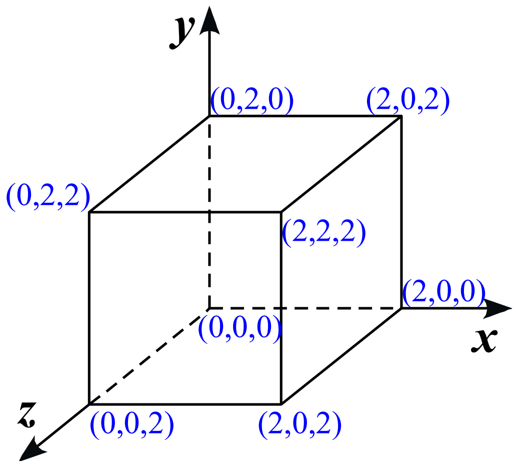


$$x' = a_x x$$

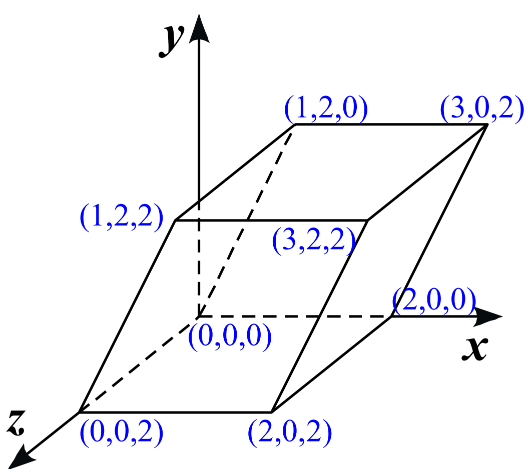
$$y' = a_y y$$

$$z' = a_z z$$

せん断



せん断変形



(x, y, z) せん断変形前の座標値

(x', y', z') せん断変形後の座標値

a_{yx} y座標値に対してx軸方向にせん断変形する比率

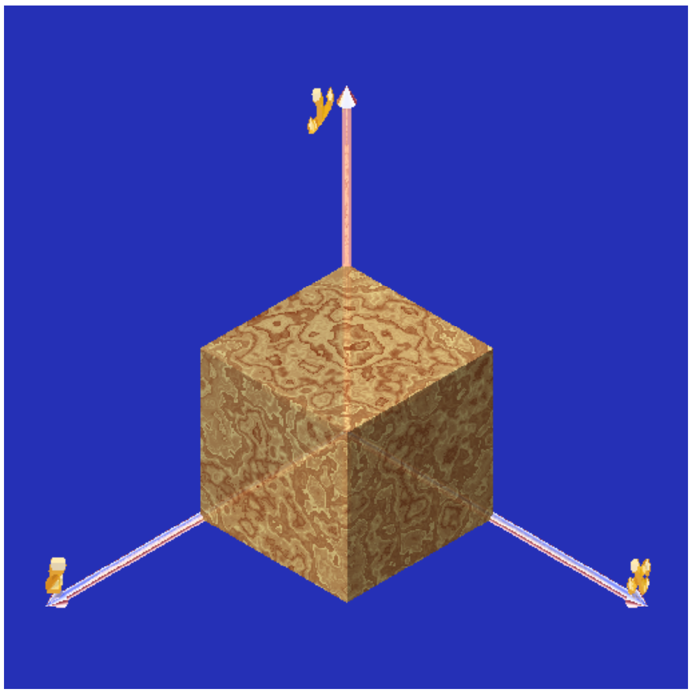
$$a_{yx} = 0.5$$

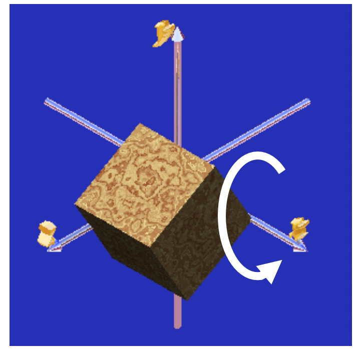
$$x' = x + a_{yx} y$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

回転

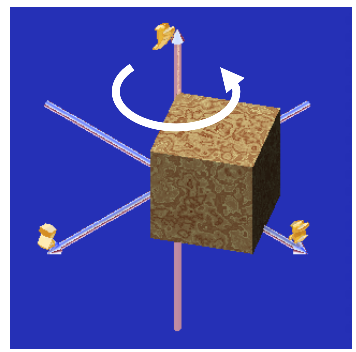




$x' = x$ x軸中心の回転

$y' = y\cos\alpha - z\sin\alpha$

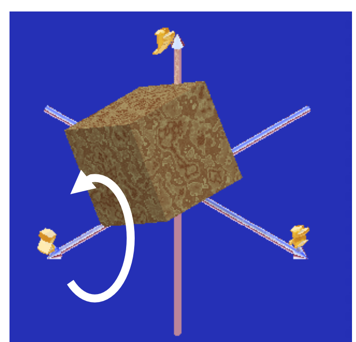
$z' = y\sin\alpha + z\cos\alpha$



$x' = x\cos\beta + z\sin\beta$

$y' = y$ y軸中心の回転

$z' = -x\sin\beta + z\cos\beta$



$x' = x\cos\gamma - y\sin\gamma$

$y' = x\sin\gamma + y\cos\gamma$

$z' = z$ z軸中心の回転

アフィン変換

ある点の位置(x,y,z)に次式の線形変換を行って(x',y',z')に移す

$$x' = a_x x + a_{yx} y + a_{zx} z + b_x$$

$$y' = a_{xy} x + a_y y + a_{zy} z + b_y$$

$$z' = a_{xz} x + a_{yz} y + a_z z + b_z$$

行列による表現

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x & a_{yx} & a_{zx} \\ a_{xy} & a_y & a_{zy} \\ a_{xz} & a_{yz} & a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

変換の合成が
面倒

同次座標の導入

$$
\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x & a_{yx} & a_{zx} & b_x \\ a_{xy} & a_y & a_{zy} & b_y \\ a_{xz} & a_{yz} & a_z & b_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \boxed{1} \end{pmatrix} \Leftarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
$$

実座標

同次座標

同じ

$$
\begin{aligned}
x' &= a_x x + a_{yx} y + a_{zx} z + b_x \\
y' &= a_{xy} x + a_y y + a_{zy} z + b_y \\
z' &= a_{xz} x + a_{yz} y + a_z z + b_z
\end{aligned}
$$

アフィン変換を
行列の積のみで
表現

行列とベクトルの積

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x' &= a_{00}x + a_{01}y + a_{02}z + a_{03}w \\ y' &= a_{10}x + a_{11}y + a_{12}z + a_{13}w \\ z' &= a_{20}x + a_{21}y + a_{22}z + a_{23}w \\ w' &= a_{30}x + a_{31}y + a_{32}z + a_{33}w \end{aligned}$$

$$x' = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \underset{\mathbf{a}}{\underset{\downarrow}{\begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{02} \\ a_{03} \end{pmatrix}^T}} \underset{\mathbf{x}}{\underset{\downarrow}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}}} = \underset{\mathbf{a} \bullet \mathbf{x}}{\underset{\downarrow}{a_{00}x + a_{01}y + a_{02}z + a_{03}w}}$$

内積

同次座標から通常座標への変換

一般の同次座標

実座標を同次座標化 (w=1)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ \boxed{w'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x & a_{yx} & a_{zx} & b_x \\ a_{xy} & a_y & a_{zy} & b_y \\ a_{xz} & a_{yz} & a_z & b_z \\ c_x & c_y & c_z & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

(0 0 0 1) ではない

これが1であるとは限らない

$$x^* = x' / w'$$
$$y^* = y' / w'$$
$$z^* = z' / w'$$

x', y', z' を w' で割る

(x^*, y^*, z^*) は (x', y', z', w') の通常座標における座標値

同次座標による座標変換行列

平行移動

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b_x \\ 0 & 1 & 0 & b_y \\ 0 & 0 & 1 & b_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

拡大縮小

$$\begin{pmatrix} a_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

せん断

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

x軸中心回転

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y軸中心回転

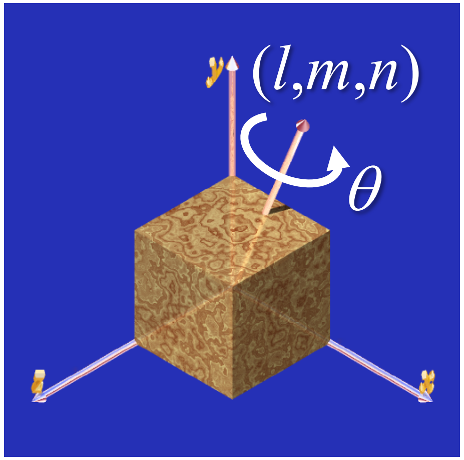
$$\begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

z軸中心回転

$$\begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

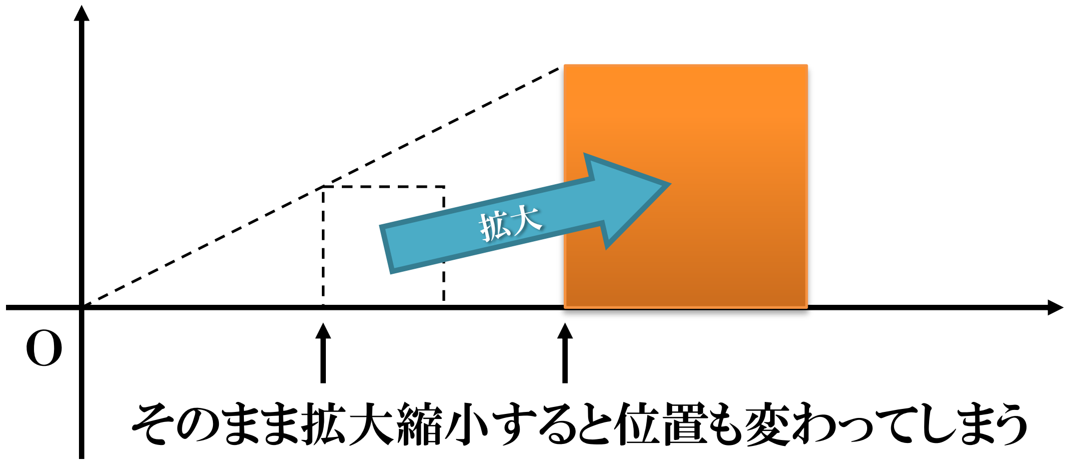
任意軸まわりの回転

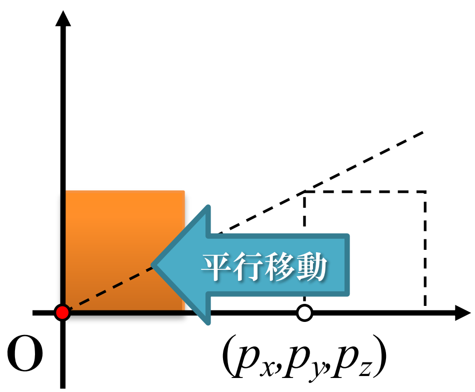
原点を通り方向単位ベクトルが(l,m,n)の直線を軸にθ回転する

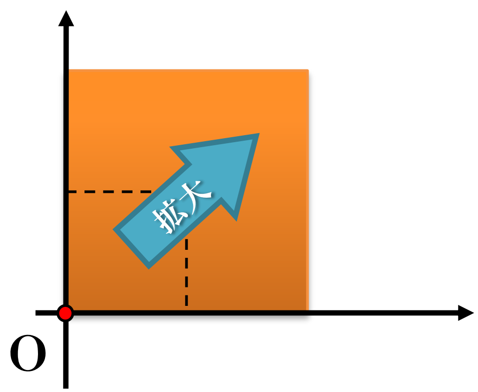


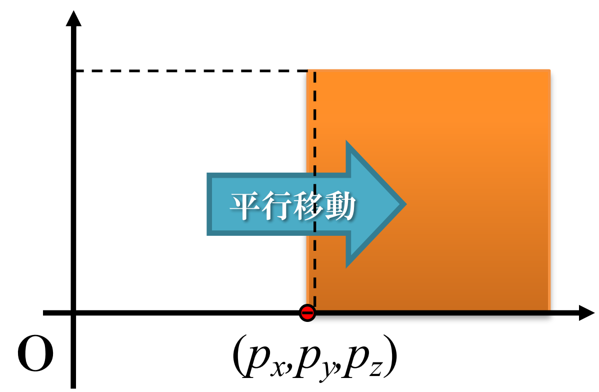
$$\begin{pmatrix} l^2+(1-l^2)\cos\theta & lm(1-\cos\theta)-n\sin\theta & ln(1-\cos\theta)+m\sin\theta & 0 \\ lm(1-\cos\theta)+n\sin\theta & m^2+(1-m^2)\cos\theta & mn(1-\cos\theta)-l\sin\theta & 0 \\ ln(1-\cos\theta)-m\sin\theta & mn(1-\cos\theta)+l\sin\theta & n^2+(1-n^2)\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

変換の組み合わせ







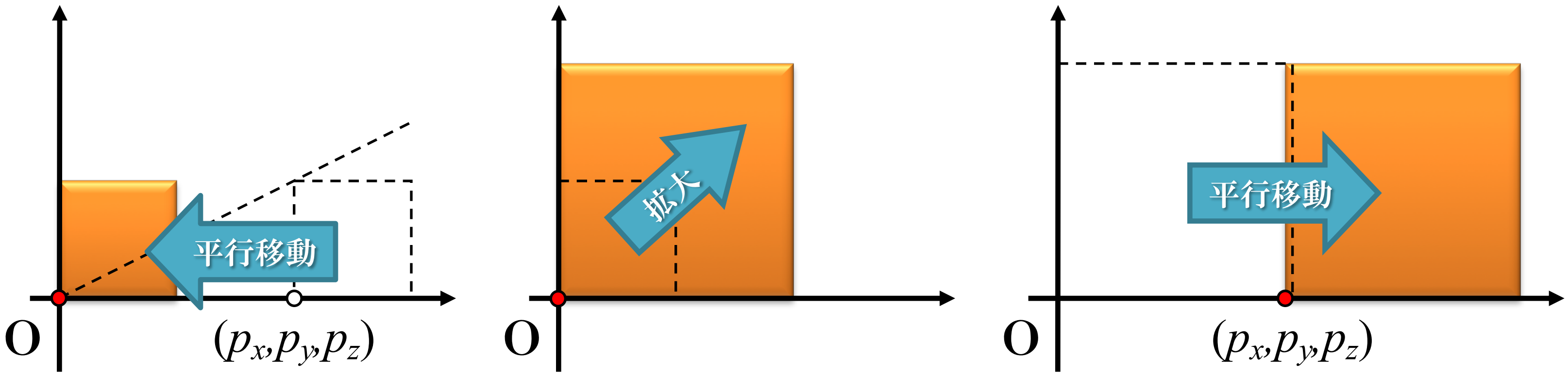


$(-p_x, -p_y, -p_z)$に平行移動して原点に移す

原点中心に(s_x, s_y, s_z)倍に拡大縮小

(p_x, p_y, p_z)に平行移動して元の位置に戻す

変換行列の合成



$(-p_x, -p_y, -p_z)$に平行移動して原点に移す

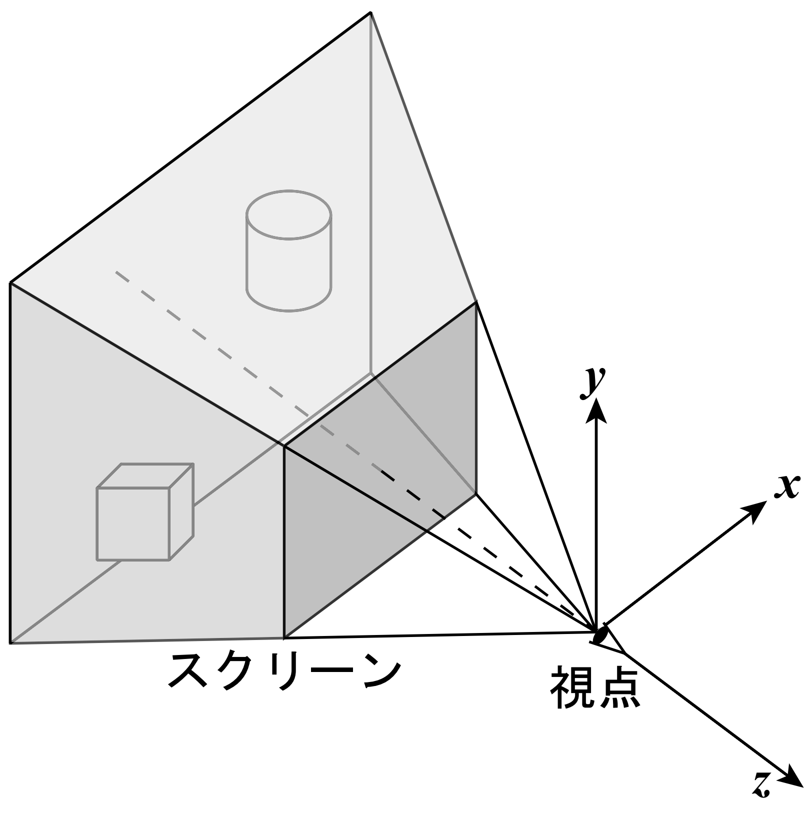
原点中心に(s_x, s_y, s_z)倍に拡大縮小

(p_x, p_y, p_z)に平行移動して元の位置に戻す

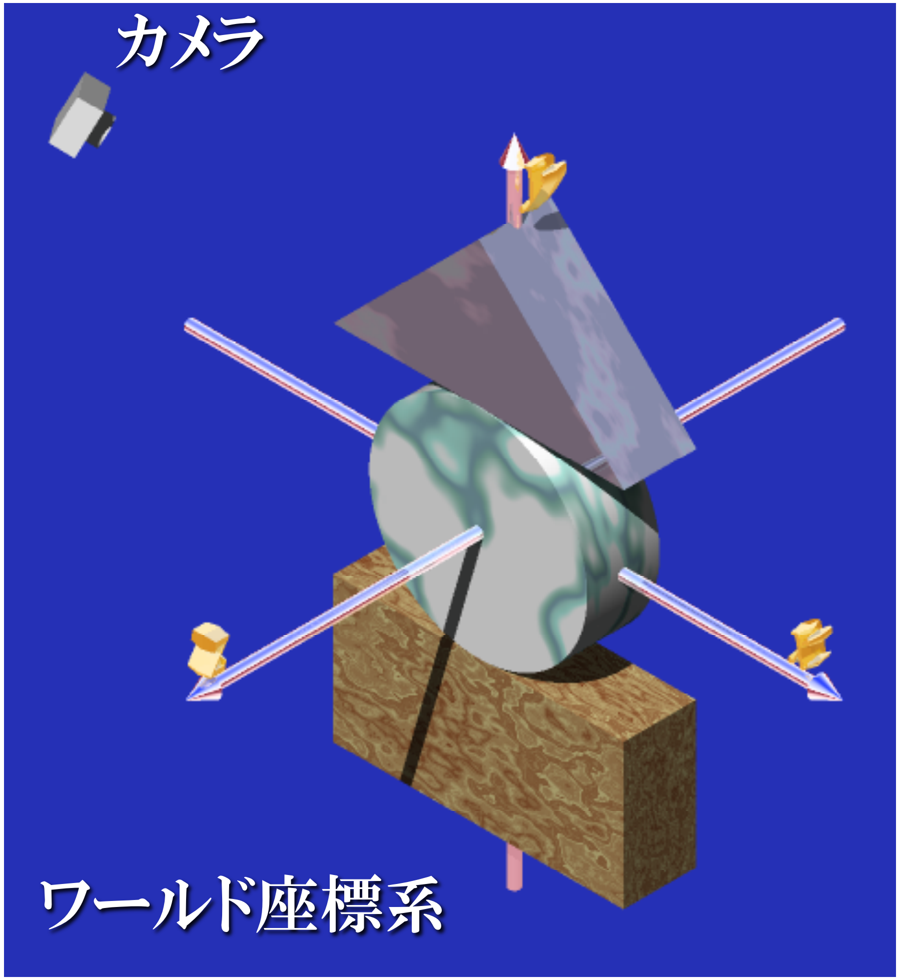
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -p_x \\ 0 & 1 & 0 & -p_y \\ 0 & 0 & 1 & -p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

視点座標系

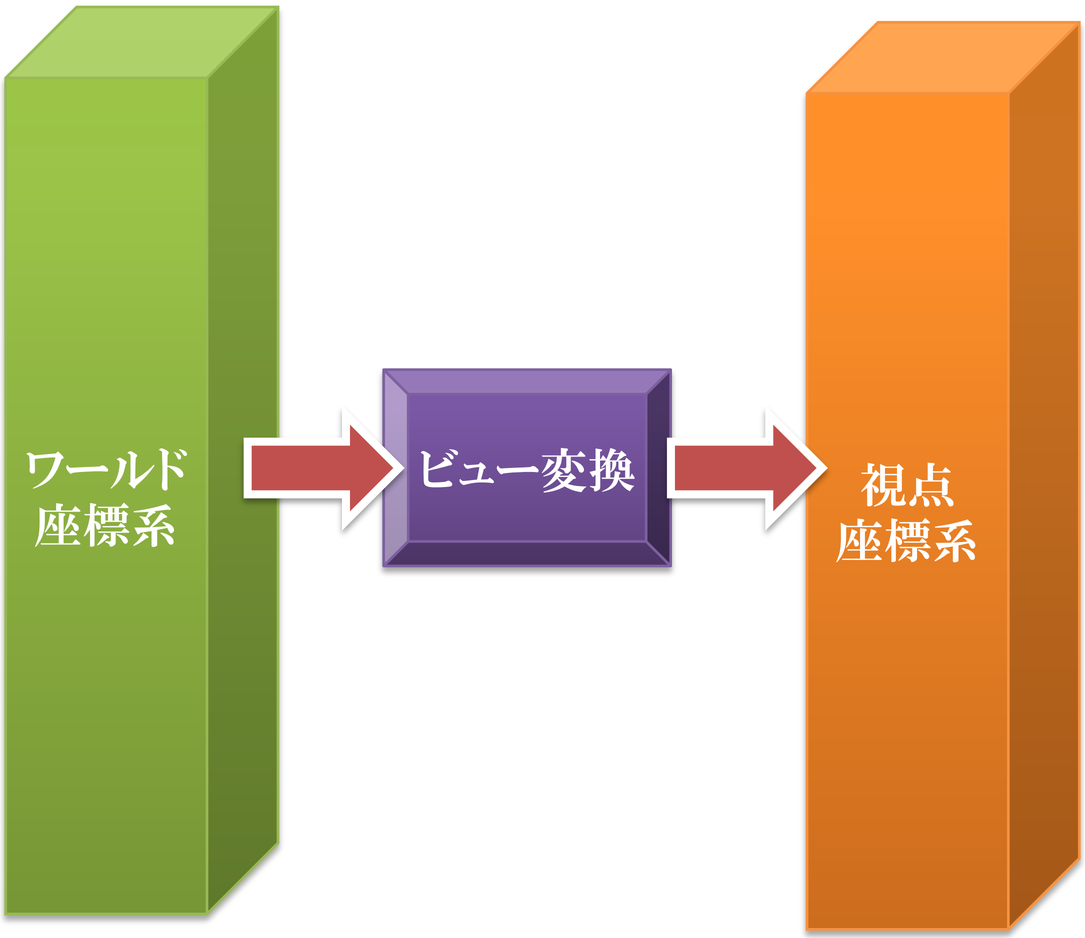
- 視点を原点とする座標系



カメラの配置

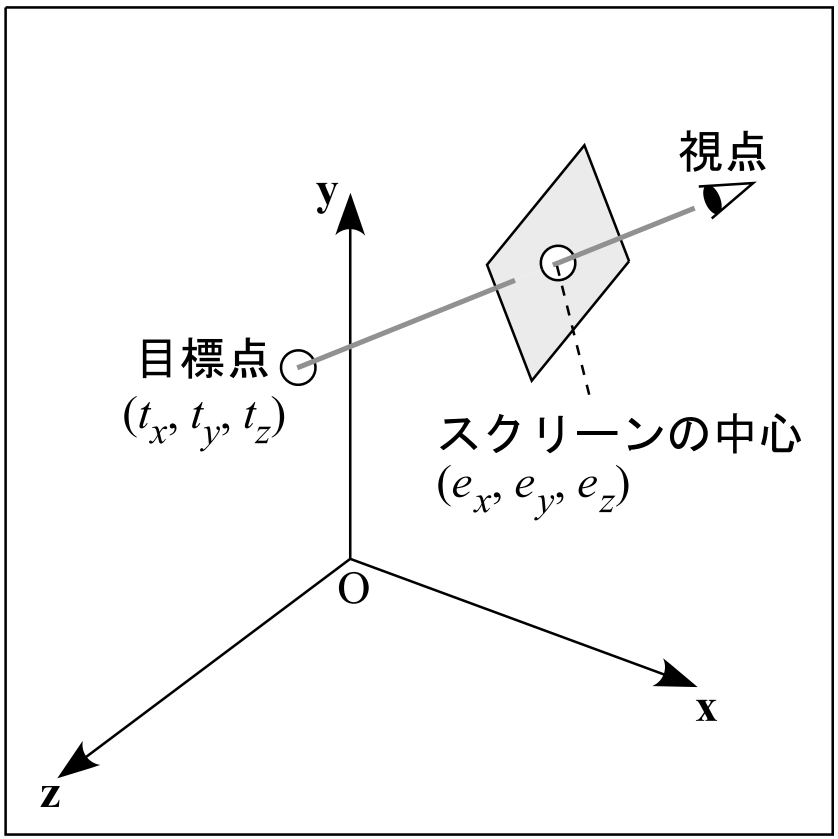


ビュー変換

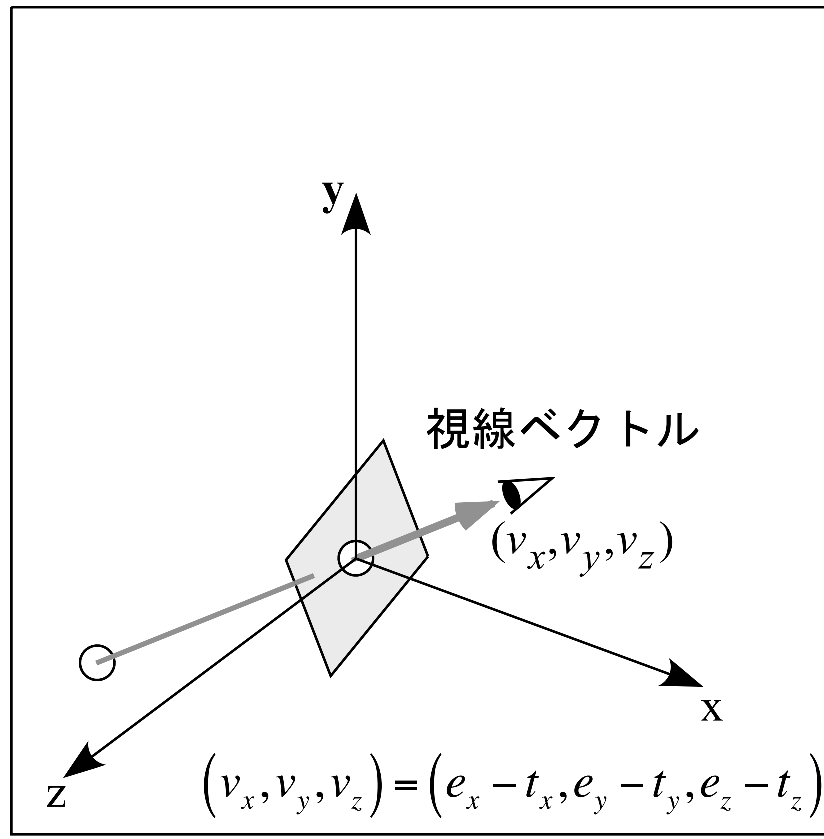


ワールド座標系の平行移動

視点の位置を設定する

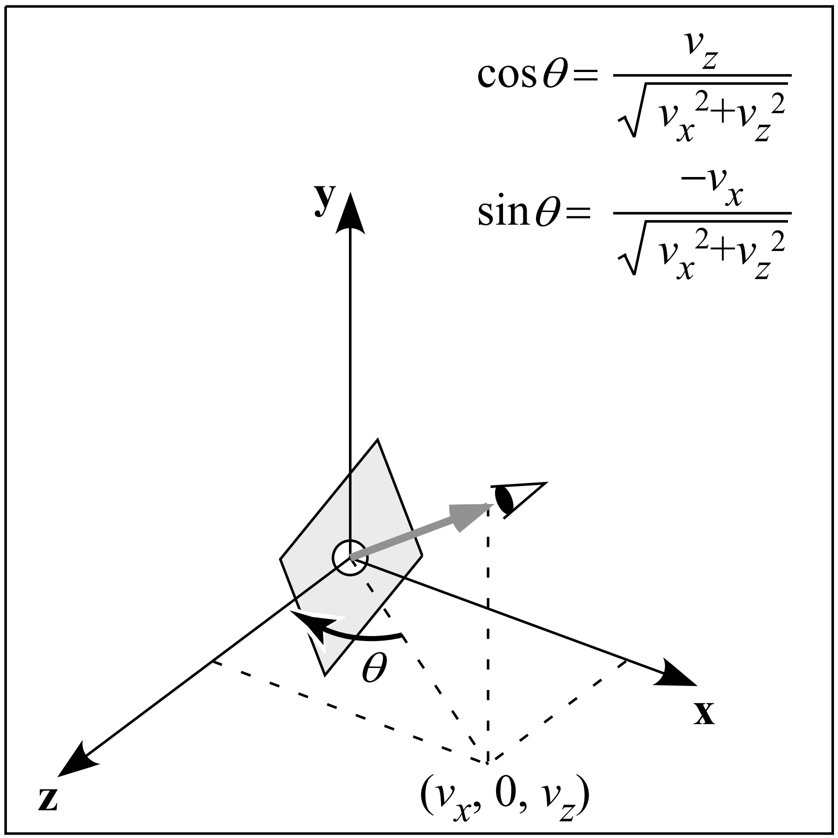


スクリーンの中心を原点にする

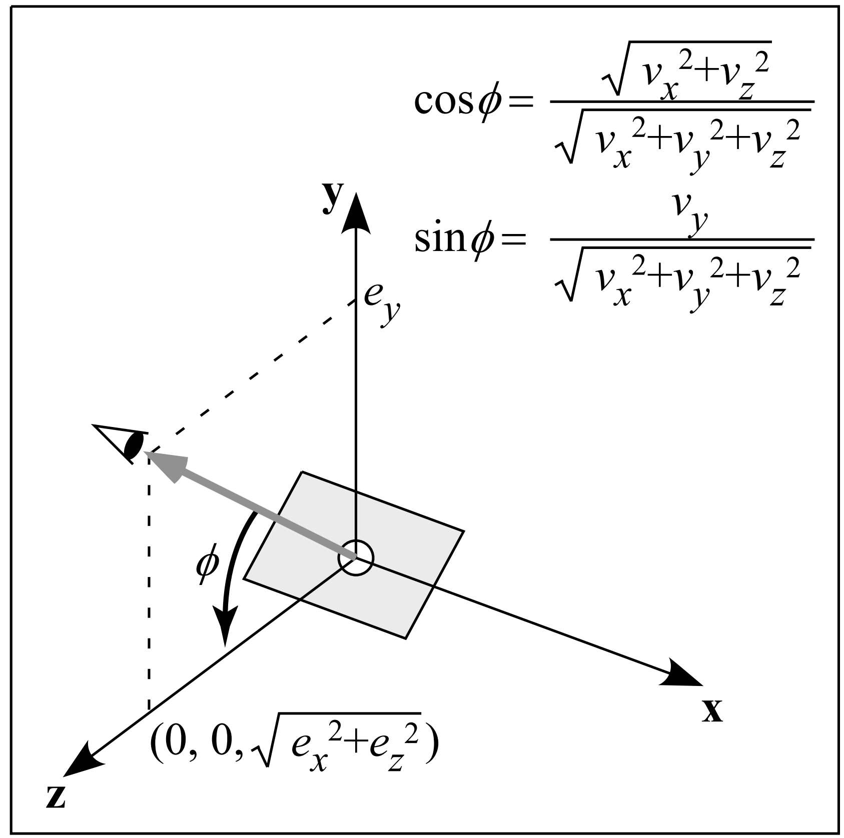


ワールド座標系の回転

y軸中心に負の方向に回転



x軸中心に正の方向に回転



ビュー変換行列

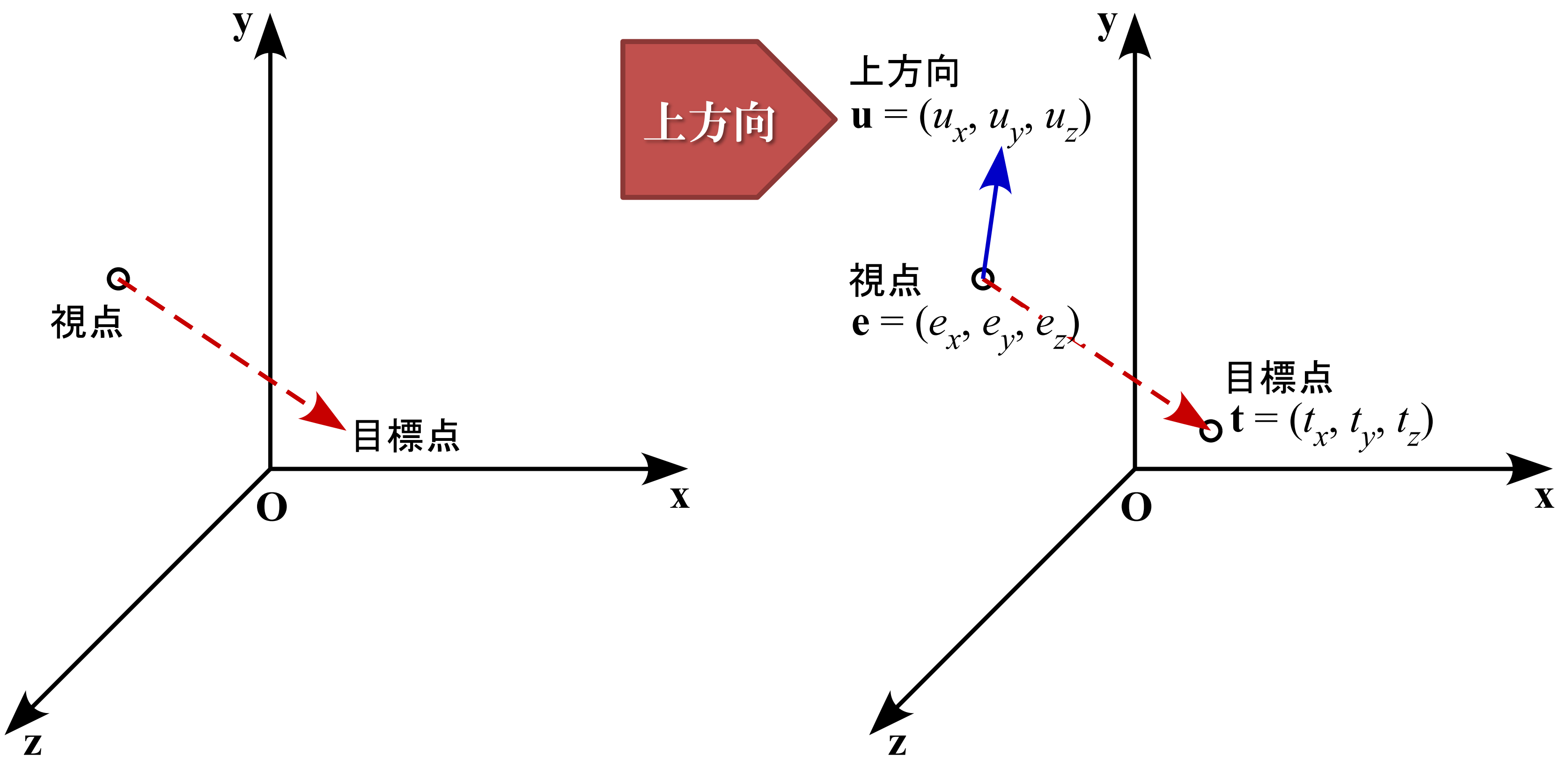
$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -p_x \\ 0 & 1 & 0 & -p_y \\ 0 & 0 & 1 & -p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

x軸中心の回転　　y軸中心の回転　　平行移動

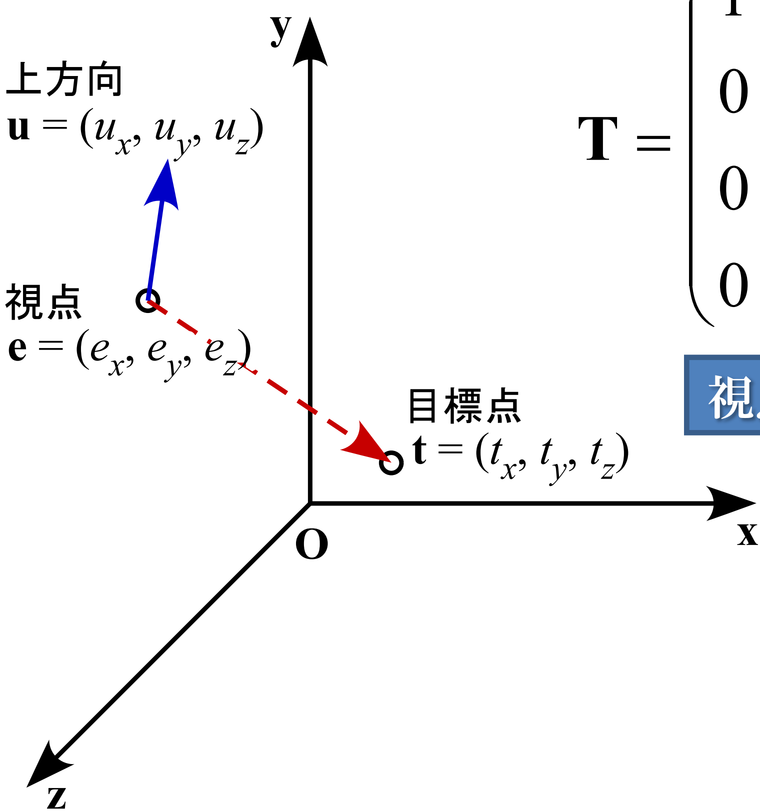
この方法の問題点

- 視線ベクトルがx=z=0（視線がy軸と平行）のとき，y軸中心の回転角を決定できない
  - $\cos\theta$, $\sin\theta$を求める際の分母が0になる
- カメラの傾き（バンク，ロール）はさらに別の変換を追加する必要がある
  - カメラの水平を維持しやすいというメリットがないわけでもない

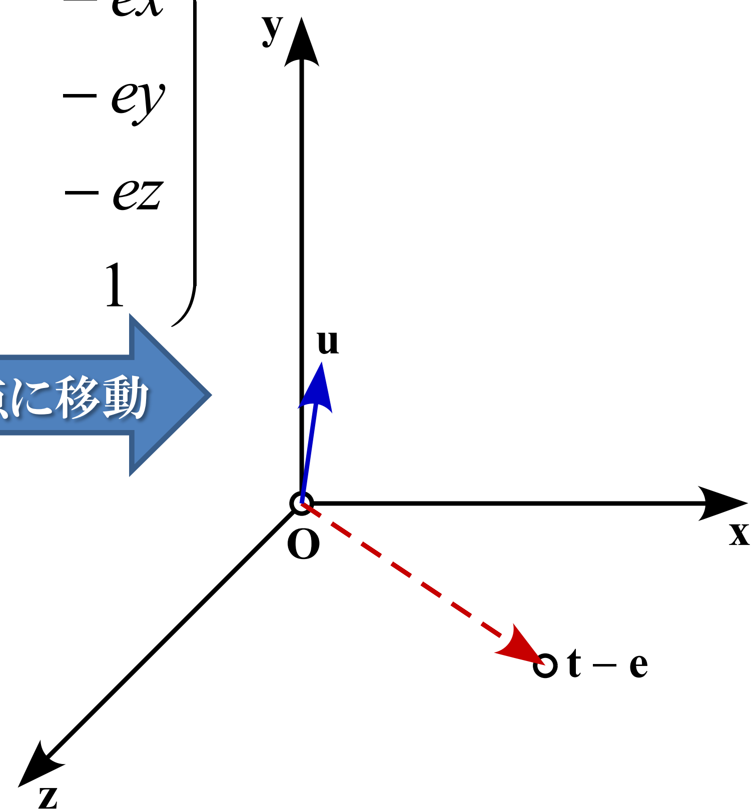
上方向のベクトルを指定する



視点を原点に移す

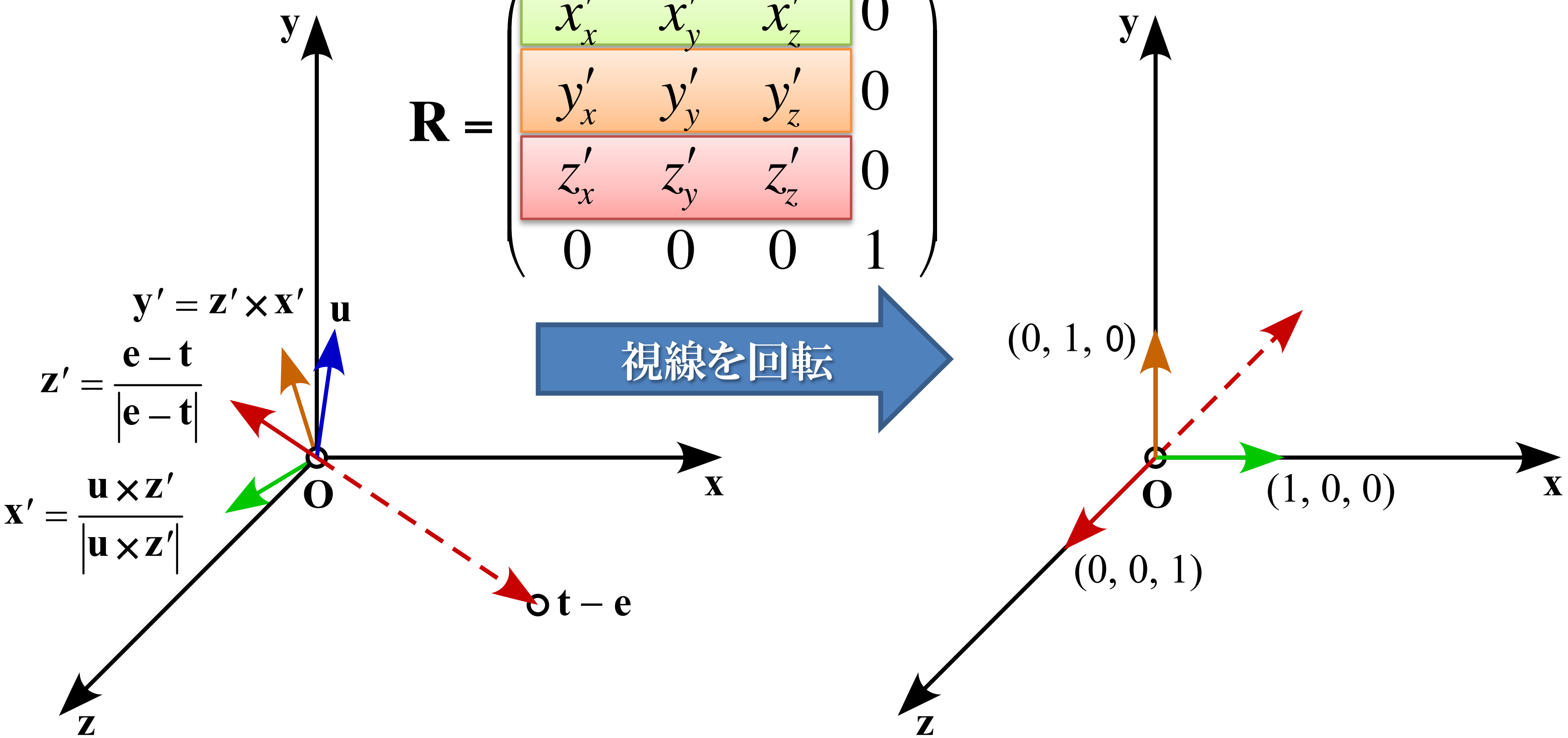


$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -ex \\ 0 & 1 & 0 & -ey \\ 0 & 0 & 1 & -ez \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



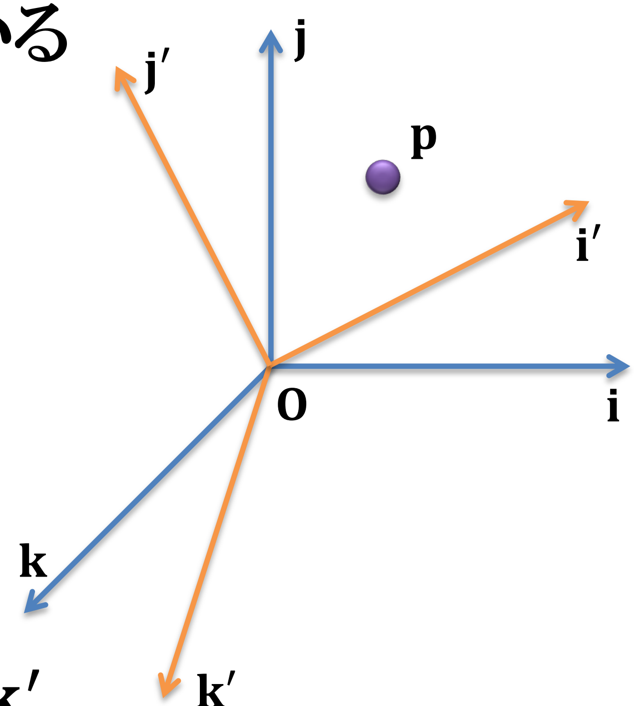
視線を z 軸の負の方向に向ける

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} x'_x & x'_y & x'_z & 0 \\ y'_x & y'_y & y'_z & 0 \\ z'_x & z'_y & z'_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



同じ点を異なる直交座標系に置く

- 二つの直交座標系 $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, $(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$
  - 軸ベクトル $\mathbf{i}$ と $\mathbf{j}$ と $\mathbf{k}$ は直交している
  - 軸ベクトル $\mathbf{i}'$ と $\mathbf{j}'$ と $\mathbf{k}'$ は直交している
- 点 $\mathbf{p}$ の座標値
  - $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ の座標系 $\rightarrow (x, y, z)$
    - $\mathbf{p} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
  - $(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$ の座標系 $\rightarrow (x', y', z')$
    - $\mathbf{p} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'$
- 座標系が異なっても $\mathbf{p}$ は同じ点
  - $\mathbf{p} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'$



異なる直交座標系の関係

$$x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}' = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$(\mathbf{i}' \quad \mathbf{j}' \quad \mathbf{k}')\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (\mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (\mathbf{i}' \quad \mathbf{j}' \quad \mathbf{k}')^{-1}(\mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (\mathbf{i}' \quad \mathbf{j}' \quad \mathbf{k}')^{T}(\mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathbf{M}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M} = (\mathbf{i}' \quad \mathbf{j}' \quad \mathbf{k}')^{T}(\mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k})$$

回転の変換行列

$$\mathbf{M} = (\mathbf{i}' \quad \mathbf{j}' \quad \mathbf{k}')^T (\mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k})$$

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$$

$$\mathbf{M} = (\mathbf{i}' \quad \mathbf{j}' \quad \mathbf{k}')^T$$

軸ベクトルを要素にした行列の転置

ビュー変換行列

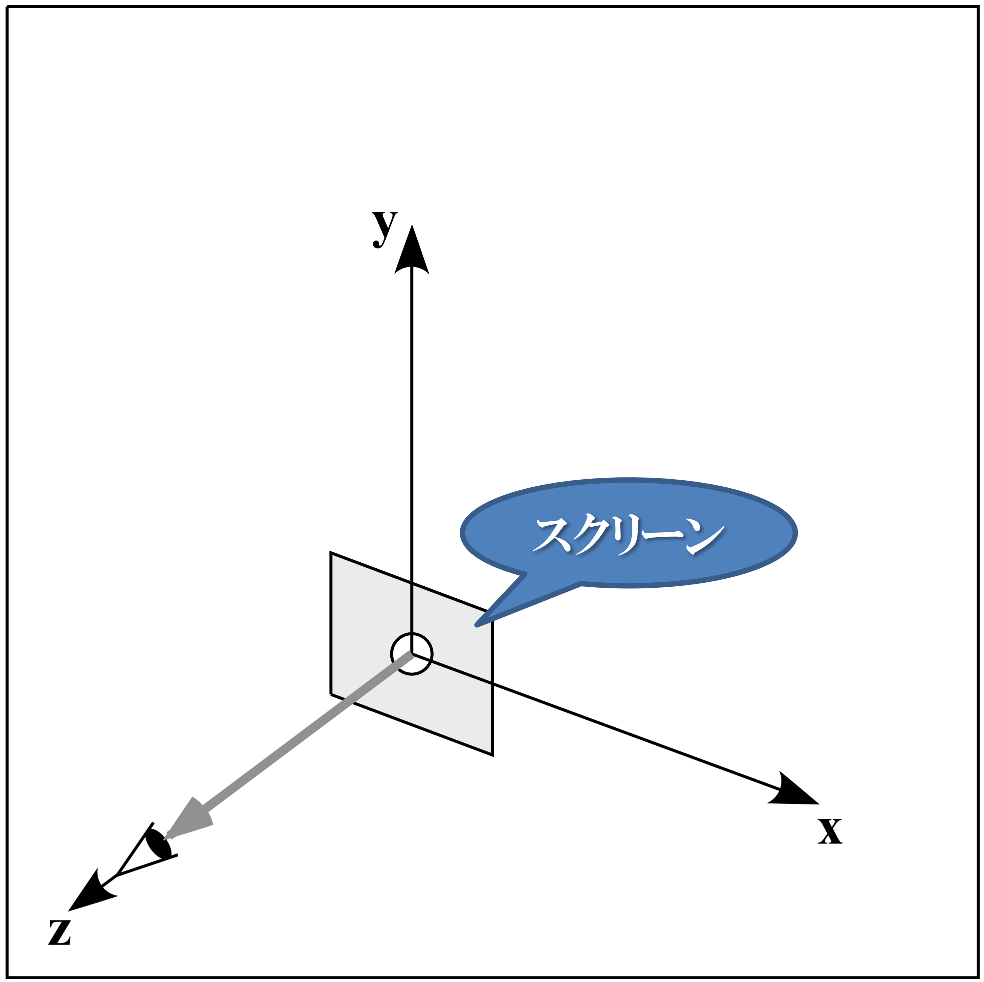
$$\mathbf{z}' = \begin{pmatrix} z'_x & z'_y & z'_z \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} ex - tx & ey - ty & ez - tz \end{pmatrix}}{\sqrt{(ex - tx)^2 + (ey - ty)^2 + (ez - tz)^2}}$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x'_x & x'_y & x'_z \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z'_x & z'_y & z'_z \end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z'_x & z'_y & z'_z \end{pmatrix}}}$$

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} y'_x & y'_y & y'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z'_x & z'_y & z'_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'_x & x'_y & x'_z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{RT} = \begin{pmatrix} x'_x & x'_y & x'_z & 0 \\ y'_x & y'_y & y'_z & 0 \\ z'_x & z'_y & z'_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -ex \\ 0 & 1 & 0 & -ey \\ 0 & 0 & 1 & -ez \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_x & x'_y & x'_z & -ex\, x'_x - ey\, x'_y - ez\, x'_z \\ y'_x & y'_y & y'_z & -ex\, y'_x - ey\, y'_y - ez\, y'_z \\ z'_x & z'_y & z'_z & -ex\, z'_x - ey\, z'_y - ez\, z'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

視点座標系の視線とスクリーン



おわり