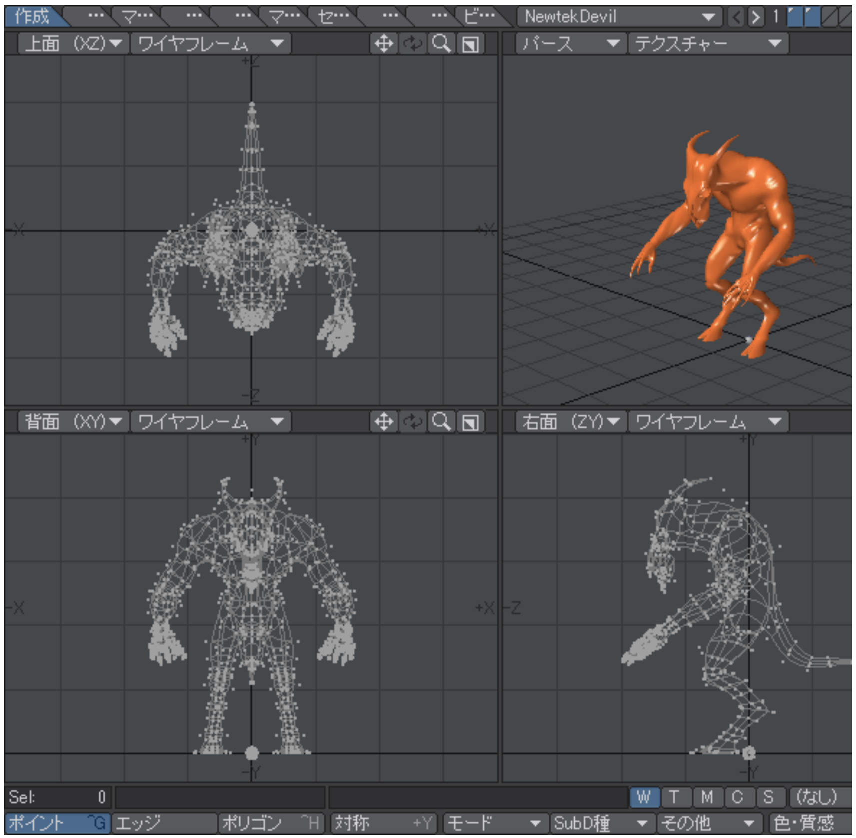
コンピュータグラフィックス

第5回：形の情報をデータにする

3次元CGの二つの要素

モデリング



レンダリング

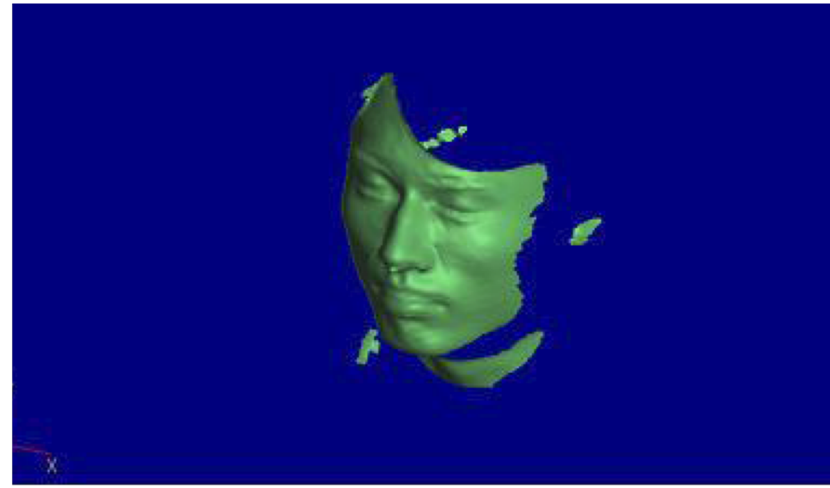
モデリング

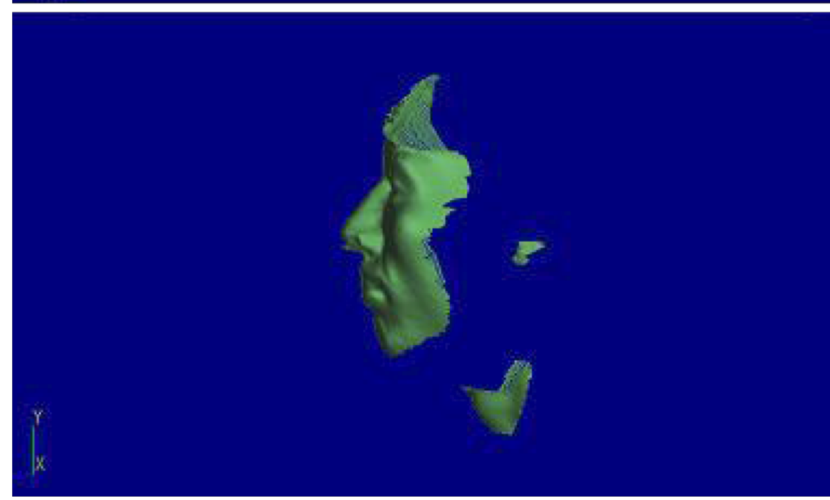
- 形をコンピュータのデータで表す
  - スキーム
    - どういう考え方で形を表現するか（枠組み）
    - どうやれば目的の形をうまく表せるか（計画）
  - フォーマット
    - データの書式
    - 形がもつどういう情報をデータに使えばいいか
    - どういった方法でデータ化するか

形状データの作成方法

- 既にある形状のデータを取る
  - 計測による
    - レイアウトマシン
    - レンジファインダ
- 頭の中にある形のイメージを具体化する
  - コンピュータとの対話による
    - モデリングソフトウェア（モデラ）
- 自動的に生成する
  - 手続き（プログラム）による

3D スキャナ (ミノルタ VIVID 700)





立体形状の表現方法

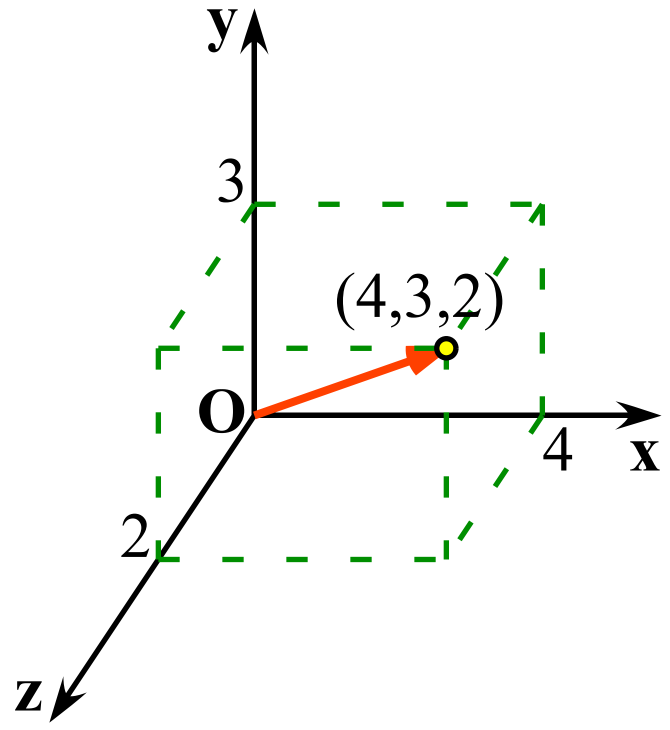
- 境界の情報による表現
- 立体の組み合わせによる表現
- 密度や濃度による表現
- 生成過程の記述による表現
- 手続きによる表現

図形要素のデータ化

- 点
  - 座標値で表す
- 線・線分
  - 直線上の2点で表す
  - 直線の方程式の係数で表す
- 平面・三角形
  - 平面上の3点で表す
  - 平面の方程式の係数

点のデータ

- 座標値(位置ベクトル)
  - (4, 3, 2)
  - (−2, 0, 4)
  - (0, 0, 0)
  - ：
- 計量情報(幾何情報)



直線・線分のデータ

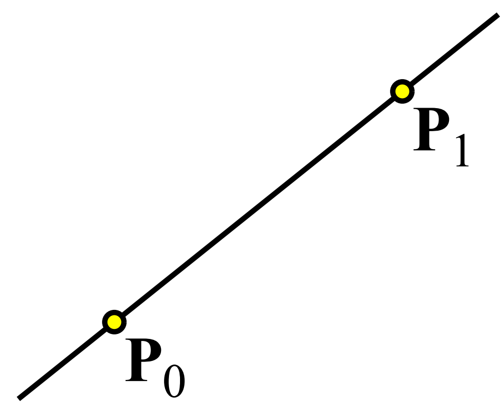
●2点で表す

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{P}_0\text{の位置ベクトル}\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0, z_0) \\ \mathrm{P}_1\text{の位置ベクトル}\mathbf{P}_1 = (x_1, y_1, z_1) \end{array}\right\}$$

この２点で直線を表す
(この２点を通る直線)

●直線の方程式

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$



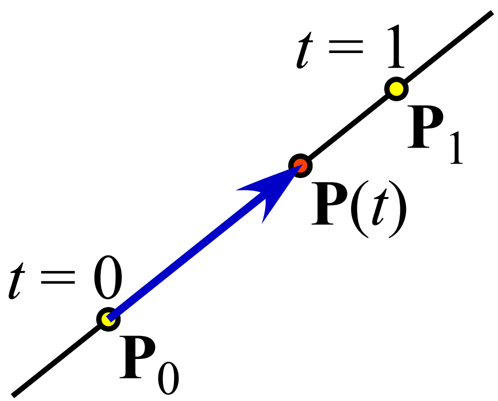
直線の媒介変数表現

● パラメータ t の導入

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}=t \text{ とおく}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t)&=(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_0)t+\mathbf{P}_0\\&=\mathbf{P}_0(1-t)+\mathbf{P}_1 t\end{aligned}$$

$$\begin{cases}x=x_0(1-t)+x_1 t\\ y=y_0(1-t)+y_1 t\\ z=z_0(1-t)+z_1 t\end{cases}$$



平面・三角形のデータ

- 3点で表す(三角形)

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{P}_0\text{の位置ベクトル}\mathbf{P}_0 = \left(x_0, y_0, z_0\right) \\ \mathrm{P}_1\text{の位置ベクトル}\mathbf{P}_1 = \left(x_1, y_1, z_1\right) \\ \mathrm{P}_2\text{の位置ベクトル}\mathbf{P}_2 = \left(x_2, y_2, z_2\right) \end{array}\right\} \quad \text{この3点を含む平面}$$

- 式で表す

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{(平面の方程式)}$$

  - この係数 (a, b, c, d) を面のデータに用いる

平面の方程式と法線ベクトル

- 3点P_0,P_1,P_2を含む平面の方程式

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{P_0}\text{の位置ベクトル}\mathbf{P}_0=(x_0,y_0,z_0) \\ \mathrm{P_1}\text{の位置ベクトル}\mathbf{P}_1=(x_1,y_1,z_1) \\ \mathrm{P_2}\text{の位置ベクトル}\mathbf{P}_2=(x_2,y_2,z_2) \end{array}\right\} \mathbf{N}=(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_0)\times(\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_0)$$

平面の法線ベクトル

$\mathbf{N}=(n_x,n_y,n_z)$とすれば， $ax+by+cz+d=0$ において，

$$a=n_x$$

$$b=n_y$$

$$c=n_z$$

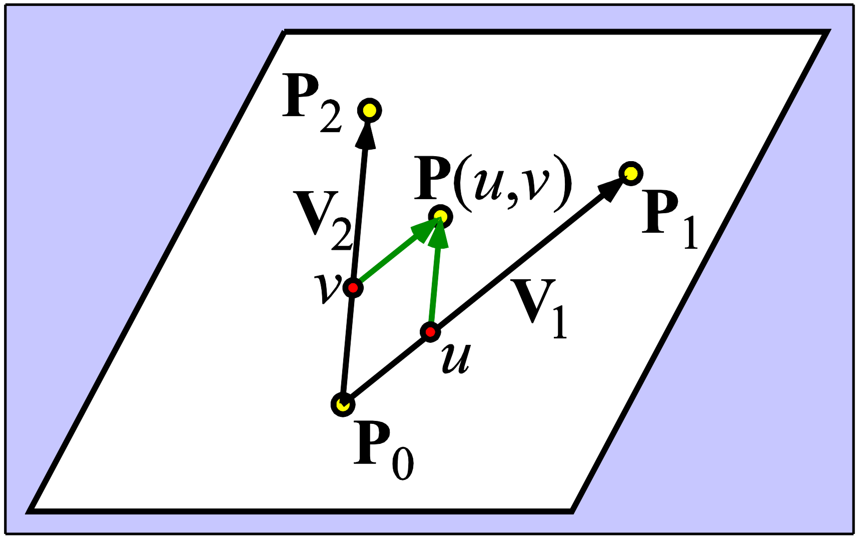
$$d=-(n_x x_0+n_y y_0+n_z z_0)$$

N は向きを持つ
↓
面には向き(表裏)がある

平面の媒介変数表現

- 2つのベクトル$\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$と位置ベクトルP0
  - $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ は一次独立（平行ではない）

$$\mathbf{P}(u,v) = u\mathbf{V}_1 + v\mathbf{V}_2 + \mathbf{P}_0$$



  - ここで

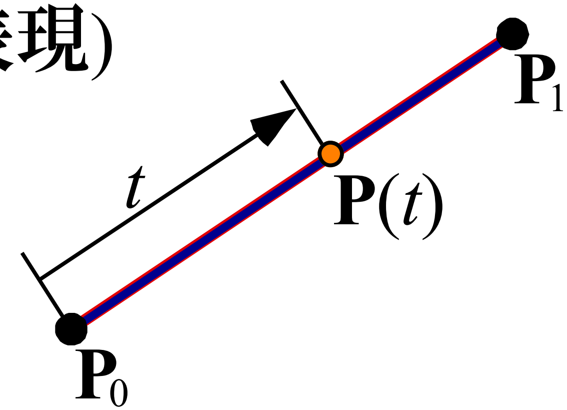
$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0$$
$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_0$$

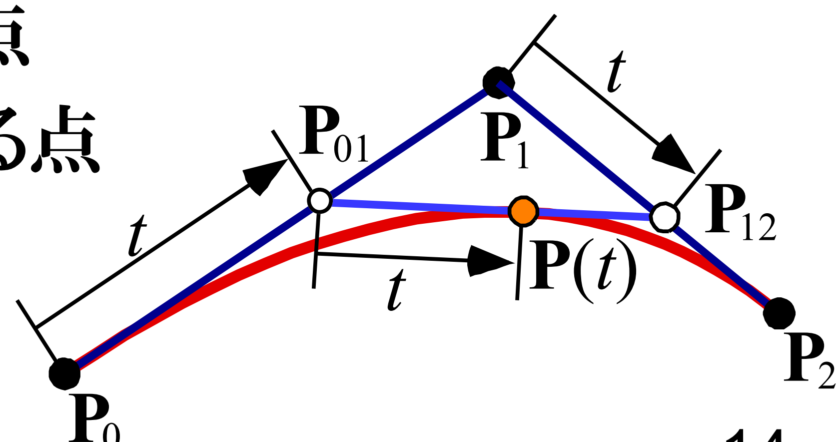
  - 法線ベクトルNは

$$\mathbf{N} = \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 = (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) \times (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_0)$$

パラメトリック曲線

- 直線
  - 媒介変数表現(パラメトリック表現)
- 2次のベジェ曲線
  - 直線に1点(P_2)追加
  - P_{01}: P_0P_1を t で内分する点
  - P_{12}: P_1P_2を t で内分する点
  - $P(t)$: $P_{01}P_{12}$を t で内分する点





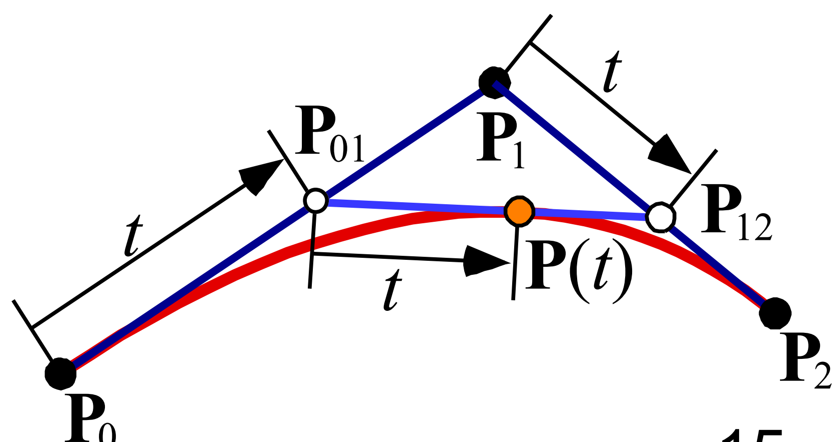
2次のベジェ曲線

- P_0, P_1 , P_2からP_{01}, P_{12}を求める

$$\mathbf{P}_{01} = \mathbf{P}_0(1-t) + \mathbf{P}_1 t$$
$$\mathbf{P}_{12} = \mathbf{P}_1(1-t) + \mathbf{P}_2 t$$

- P_{01}, P_{12}から$P(t)$を求める

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t) &= \mathbf{P}_{01}(1-t) + \mathbf{P}_{12} t \\ &= \mathbf{P}_0(1-t)^2 + 2\mathbf{P}_1(1-t)t + \mathbf{P}_2 t^2\end{aligned}$$

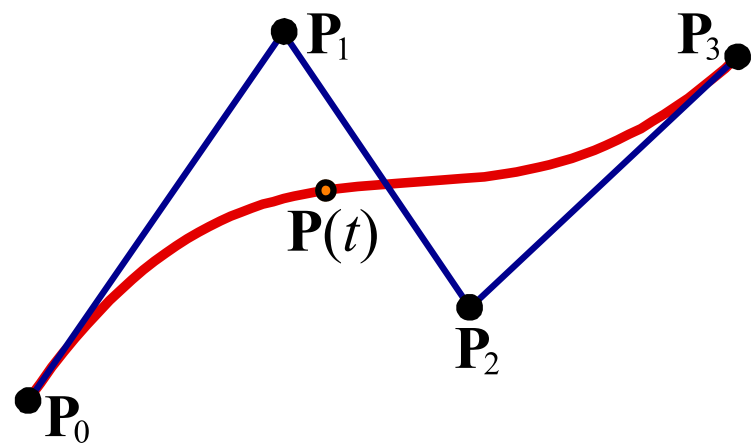


3次のベジェ曲線

- P_0, P_1 , P_2 , P_3からP$_{012}$, P_{123}を求める

$$\mathbf{P}_{012} = \mathbf{P}_0(1-t)^2 + 2\mathbf{P}_1(1-t)t + \mathbf{P}_2 t^2$$

$$\mathbf{P}_{123} = \mathbf{P}_1(1-t)^2 + 2\mathbf{P}_2(1-t)t + \mathbf{P}_3 t^2$$



- P_{012}, P_{123}からP(t)を求める

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t) &= \mathbf{P}_{012}(1-t) + \mathbf{P}_{123}t \\ &= \mathbf{P}_0(1-t)^3 + 3\mathbf{P}_1(1-t)^2 t + 3\mathbf{P}_2(1-t)t^2 + \mathbf{P}_3 t^3\end{aligned}$$

n 次のベジェ曲線

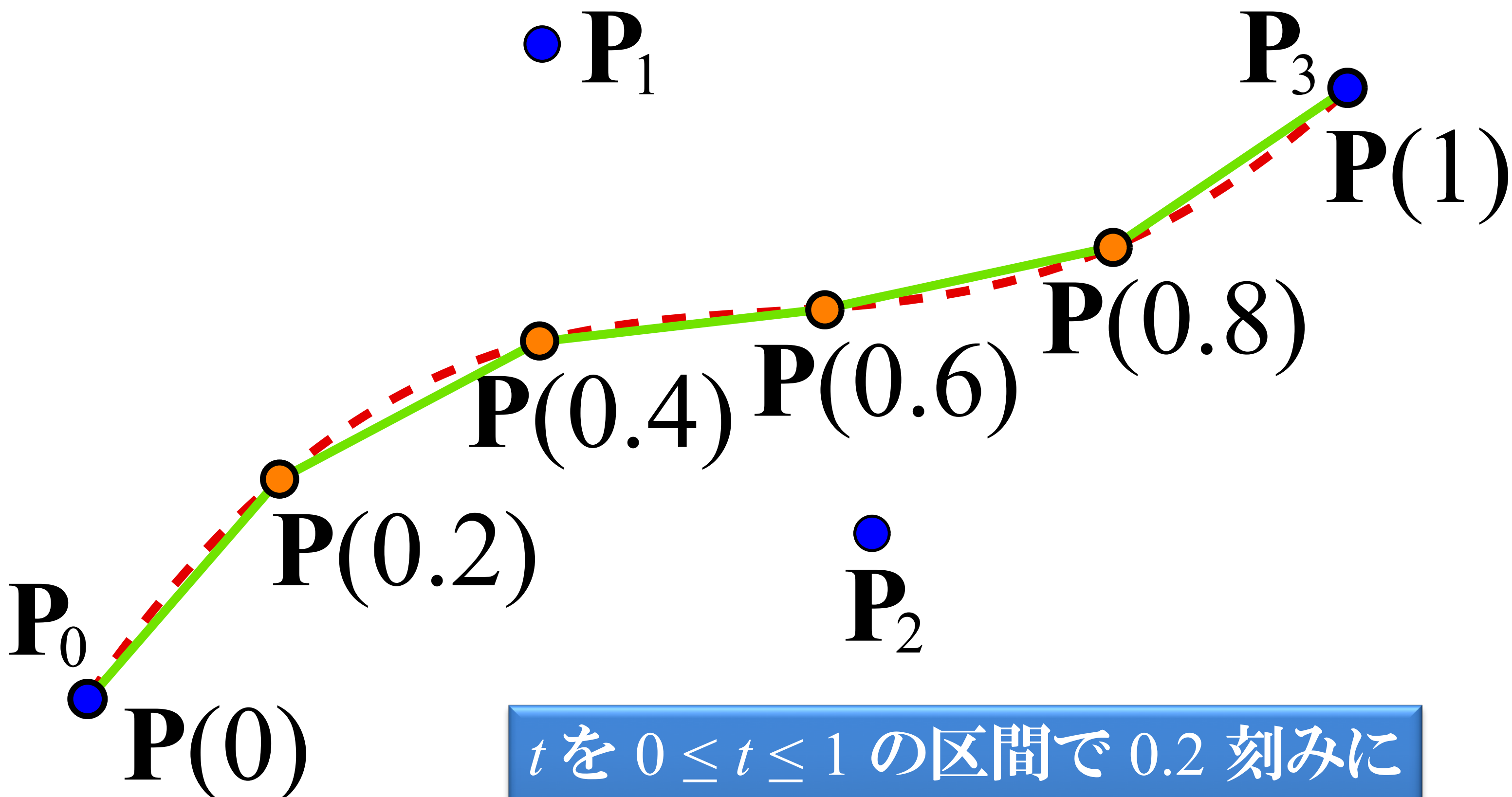
$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}_i B_i^n(t)$$

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$ バーンスタイン基底関数

$$\binom{n}{i} = {}_nC_i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$ 二項係数

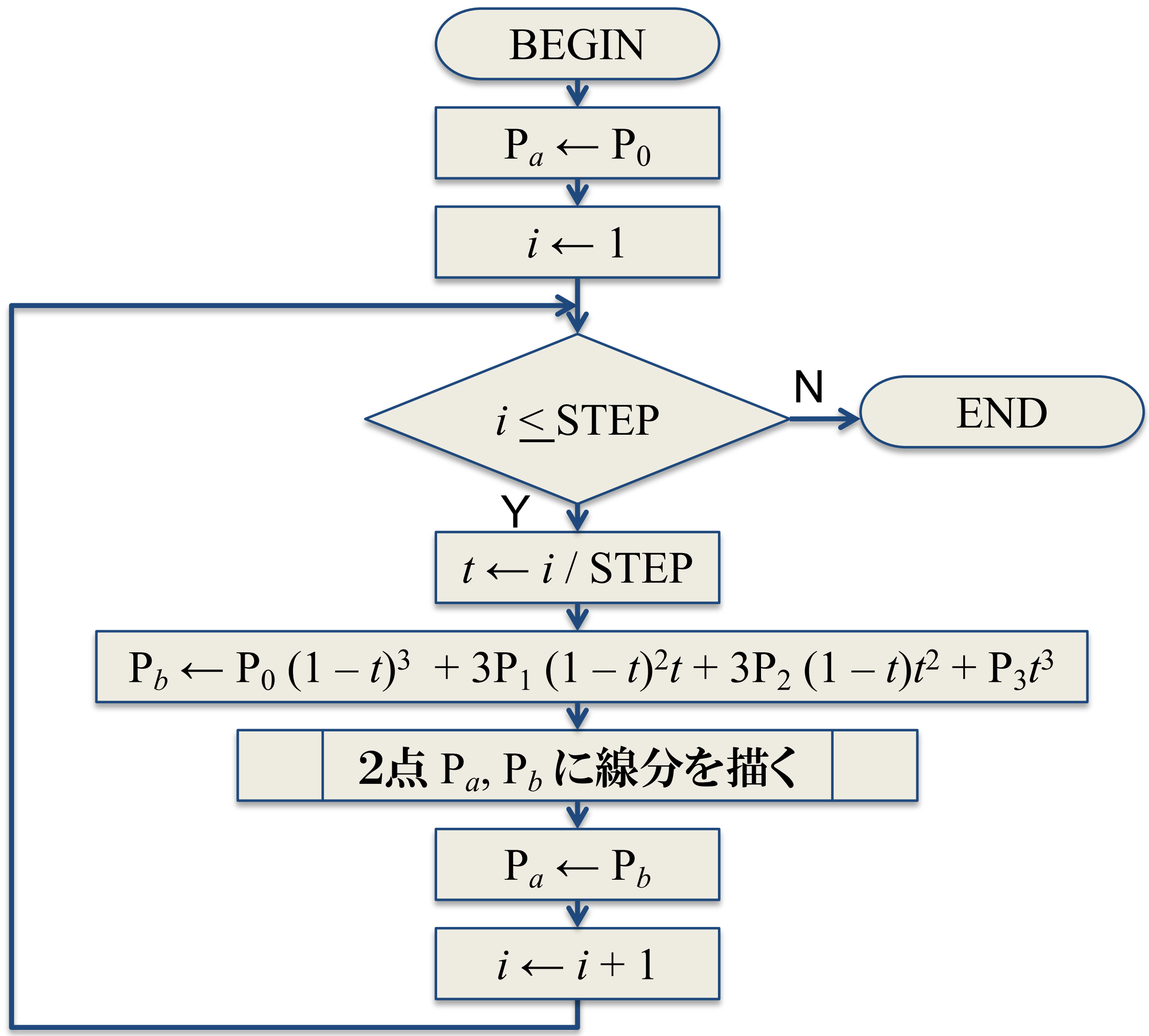
n個の中からi個選んだときの組み合わせの数

ベジェ曲線の折れ線近似 (1)

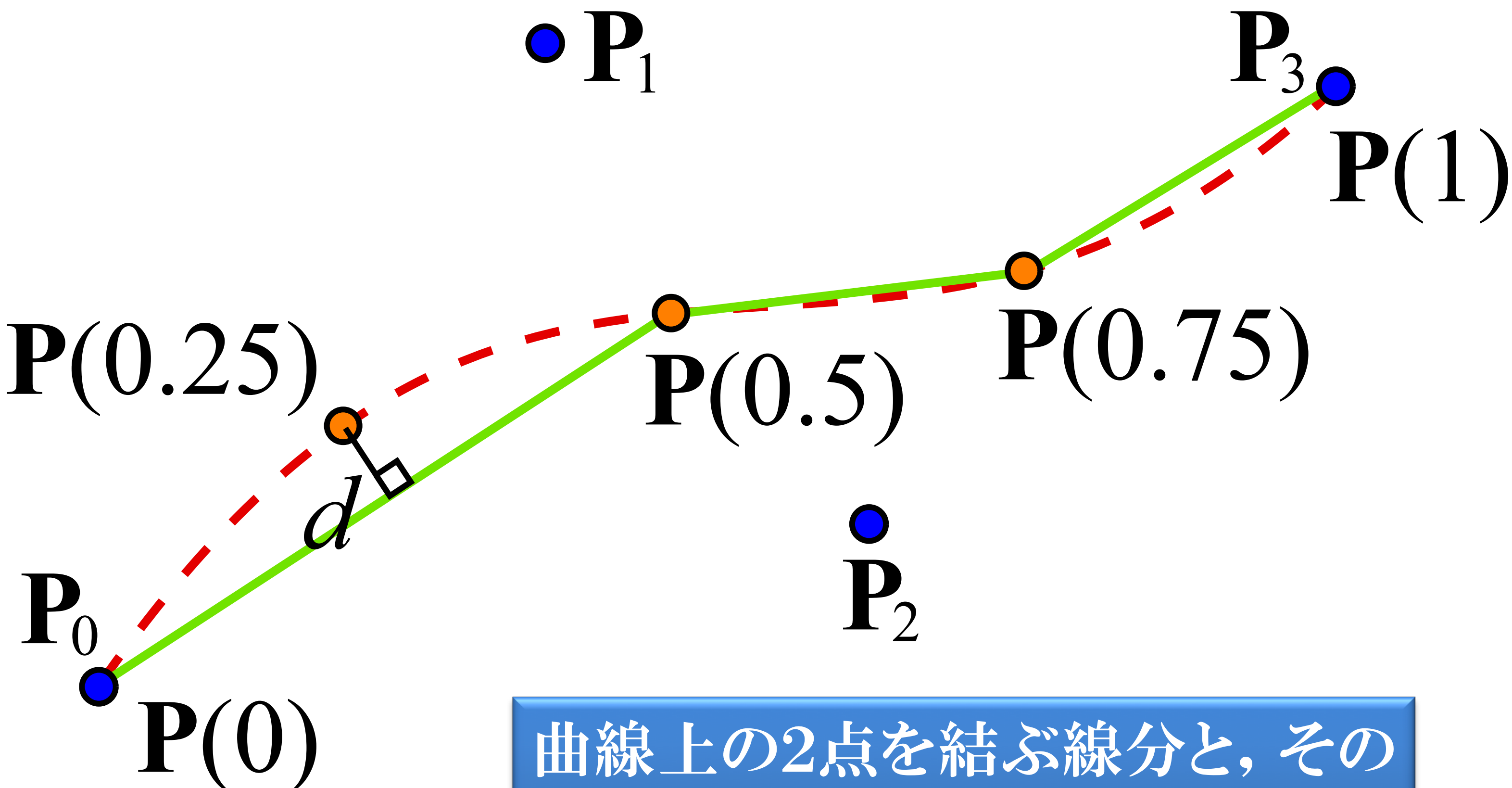


t を $0 \leq t \leq 1$ の区間で 0.2 刻みに設定し，それぞれの曲線上の点の位置 $P(t)$ を求めて線分で結ぶ

ベジェ曲線の折れ線近似 (1) 手順



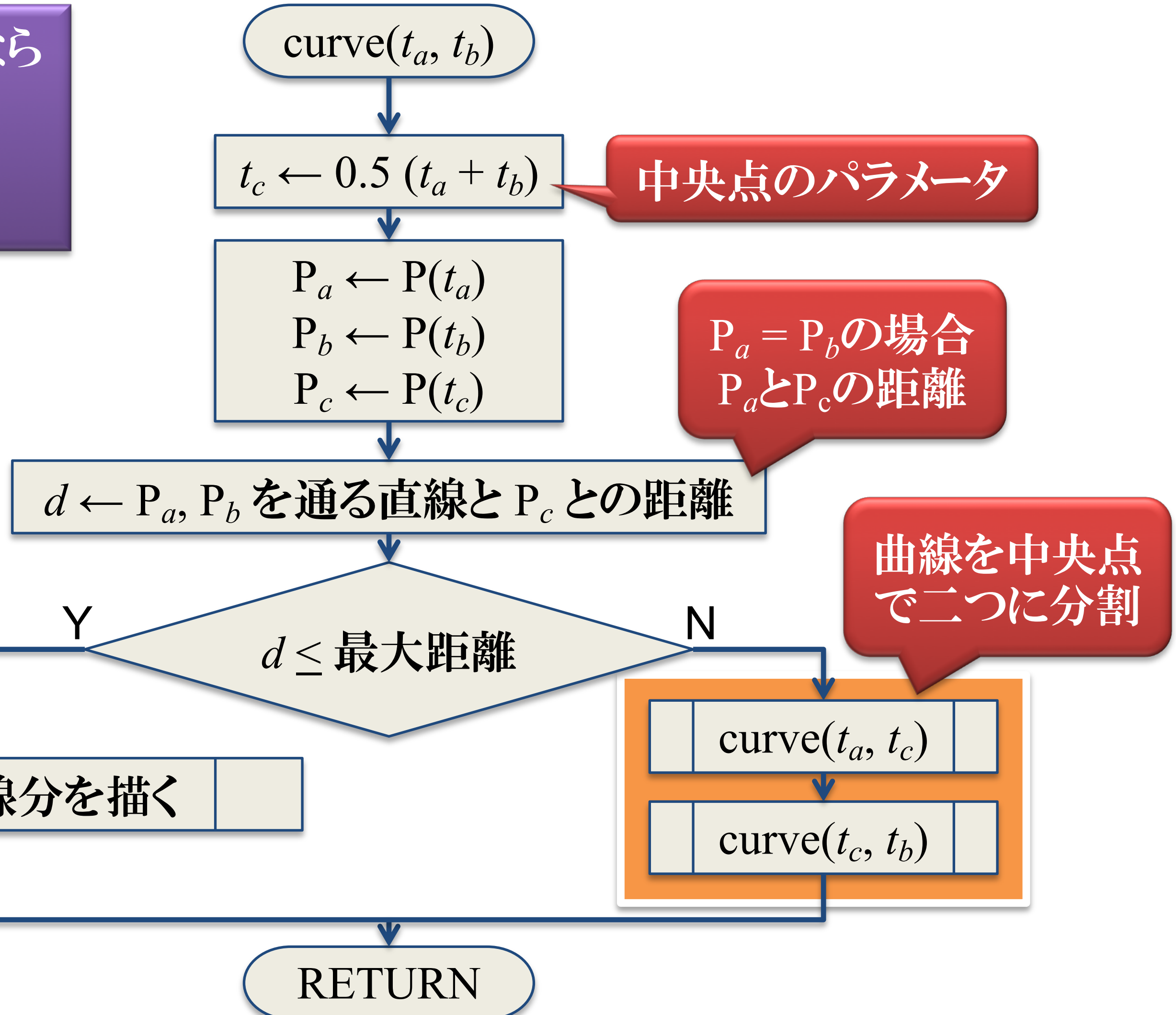
ベジェ曲線の折れ線近似 (2)



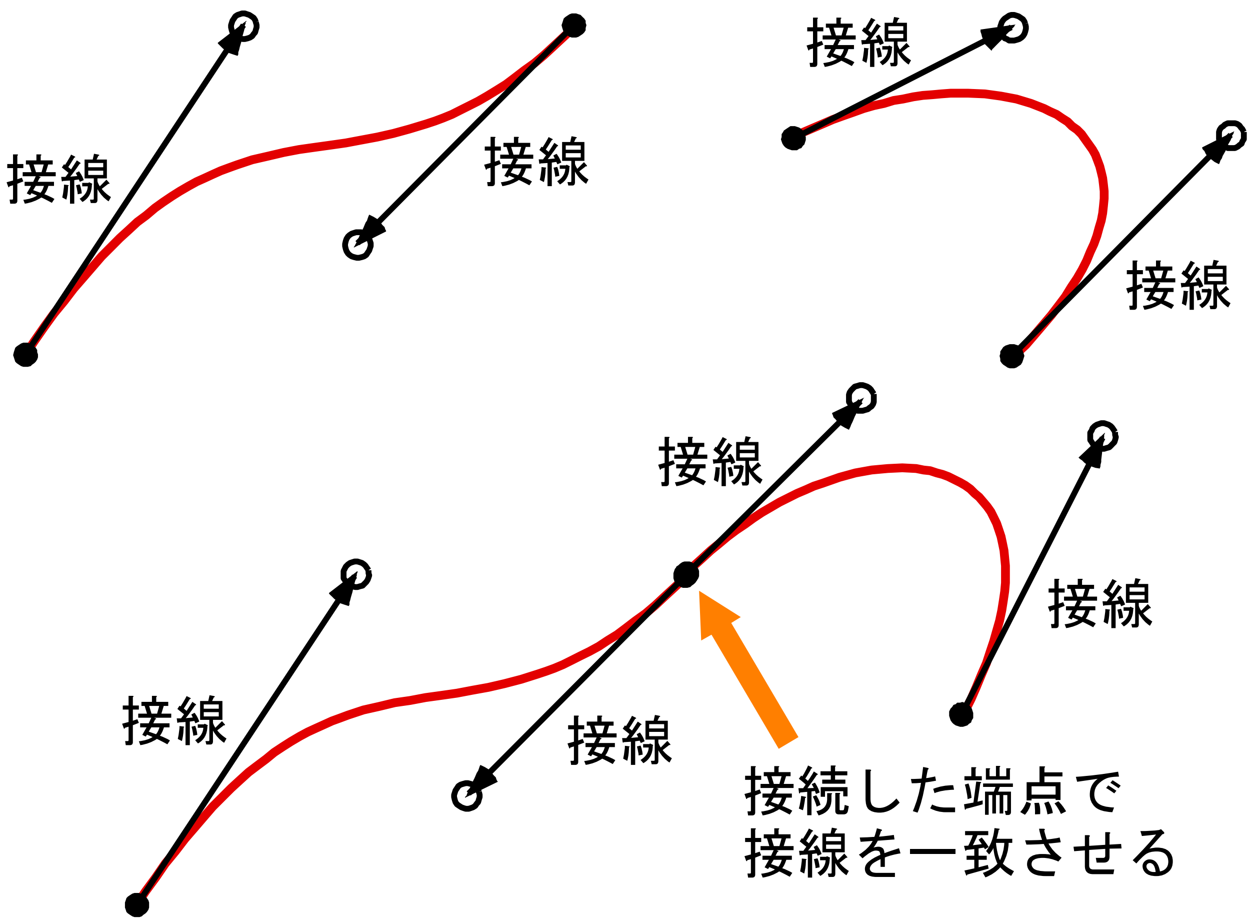
曲線上の2点を結ぶ線分と，その2点の中間にある曲線上の点との距離dが一定以下になるまで分割

ベジェ曲線の折れ線近似 (2) 手順

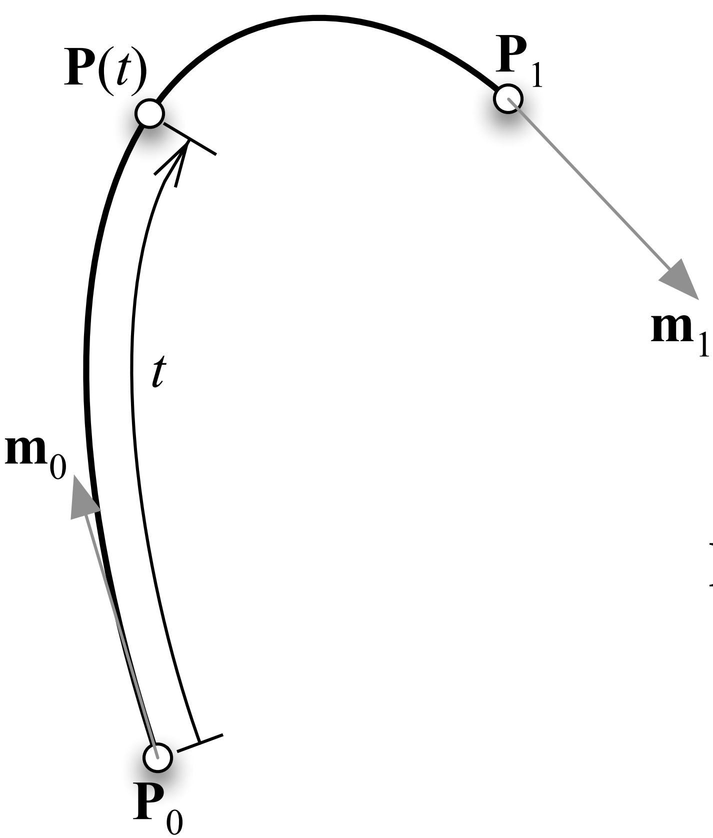
3次のベジェ曲線なら
curve(0.0, 0.5);
curve(0.5, 1.0);
を実行する



ベジェ曲線の接続



3次エルミート曲線



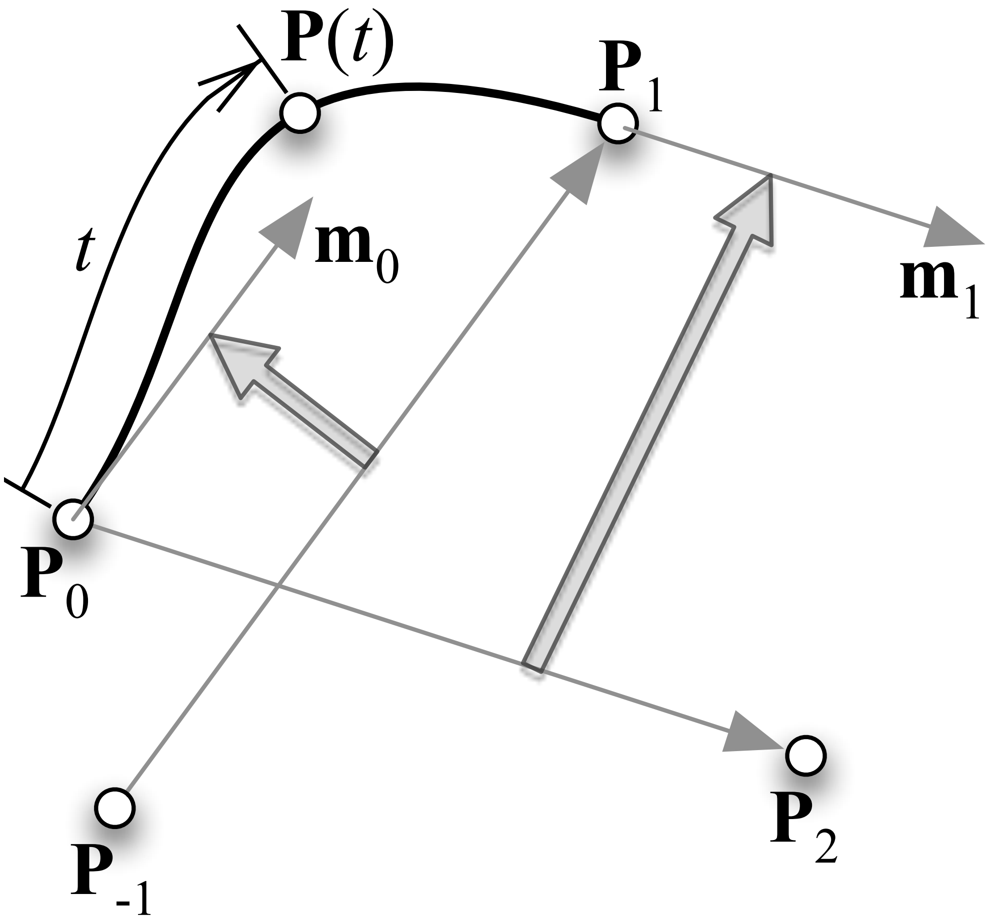
$\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$:　端点の位置ベクトル
$\mathbf{m}_0$,$\mathbf{m}_1$: それぞれの端点における接線ベクトル

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0\left(2t^3 - 3t^2 + 1\right) + \mathbf{m}_0\left(t^3 - 2t^2 + t\right)$$
$$+\mathbf{P}_1\left(-2t^3 + 3t^2\right) + \mathbf{m}_1\left(t^3 - t^2\right)$$

3次エルミート曲線の導出

- 3次関数を考える
  - $p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$
- 一階微分する
  - $p'(t) = 3at^2 + 2bt + c$
- $t = 0$ において
  - $y(0) = d = p_0$
  - $y'(0) = c = m_0$
- $t = 1$ において
  - $y(1) = a + b + c + d = p_1$
  - $y'(1) = 3a + 2b + c = m_1$
- 連立方程式が得られる
  - $a + b = p_1 - p_0 - m_0$
  - $3a + 2b = m_1 - m_0$
- 連立方程式を解く
  - $a = -2(p_1 - p_0) + m_1 + m_0$
  - $b = 3(p_1 - p_0) - m_1 - 2m_0$
  - $c = m_0$
  - $d = p_0$

Catmull-Rom 曲線



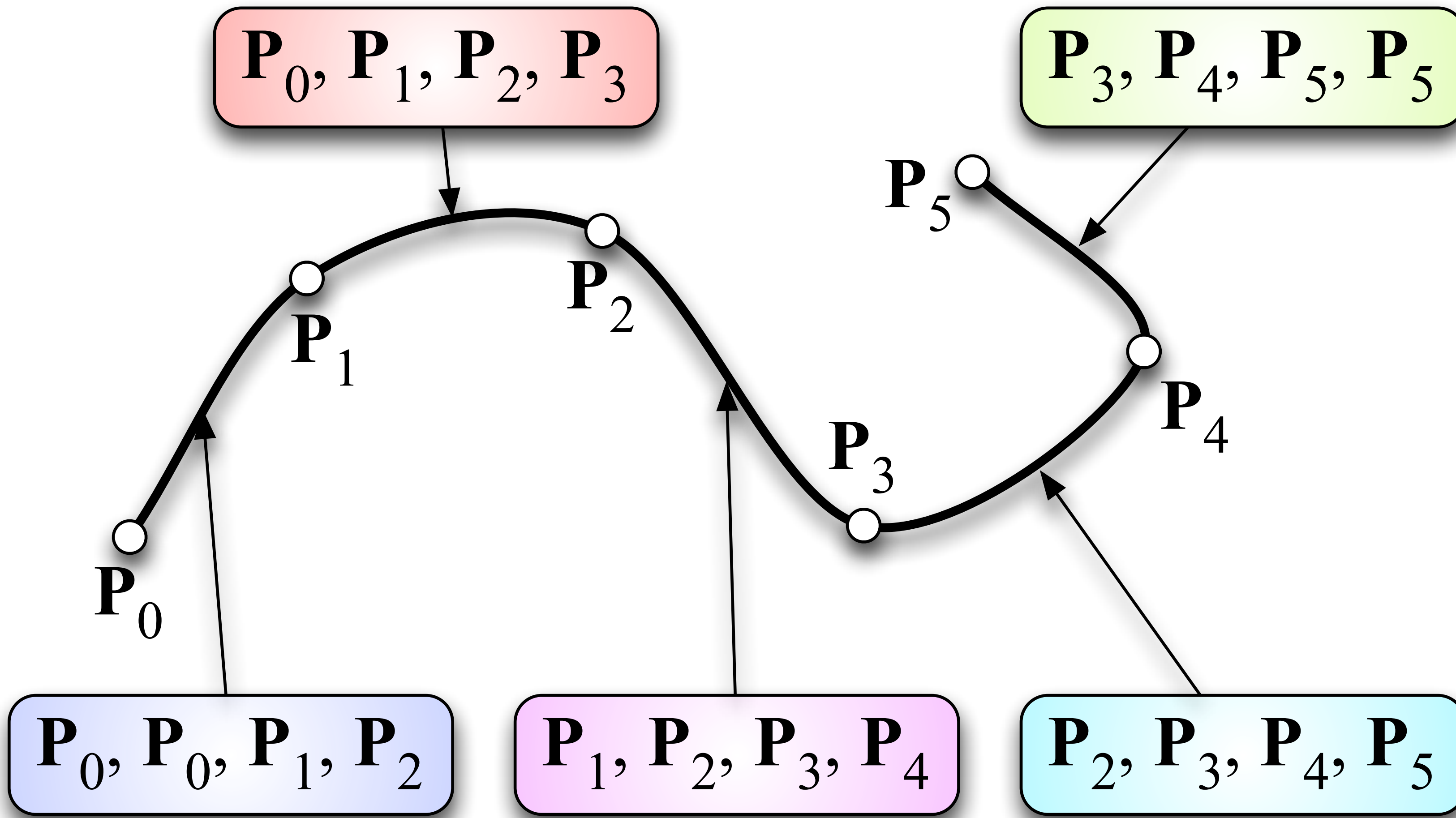
3次エルミート曲線において

$\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1$: 端点の位置
$\mathbf{P}_{-1}$: $\mathbf{P}_0$の一つ手前の点
$\mathbf{P}_2$: $\mathbf{P}_1$の一つ次の点

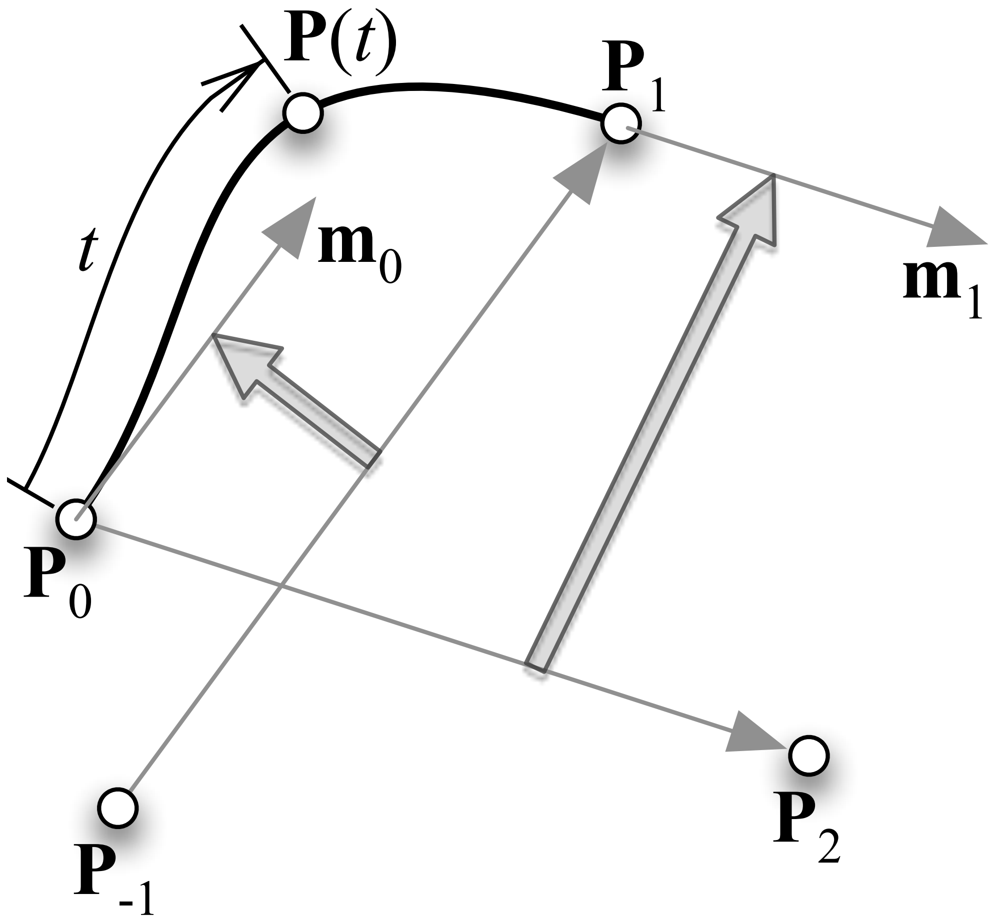
$$\mathbf{m}_0 = \frac{\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_{-1}}{2}$$

$$\mathbf{m}_1 = \frac{\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_0}{2}$$

Catmull-Rom 曲線の接続



カーディナル曲線



3次エルミート曲線において

P_0, P_1: 端点の位置
P_{-1}: P_0の一つ手前の点
P_2: P_1の一つ次の点

$$\mathbf{m}_0 = (1 - c)\frac{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_{-1}}{2}$$

$$\mathbf{m}_1 = (1 - c)\frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0}{2}$$

テンション（張力）

Bスプライン曲線

$$\mathbf{P}(t)=\sum_{i=0}^{n+L-1}\mathbf{P}_i N_i^n(t)$$

$$N_i^n(t)=\frac{t-t_i}{t_{i+n}-t_i}N_i^{n-1}(t)+\frac{t_{i+n+1}-t}{t_{i+n+1}-t_{i+1}}N_{i+1}^{n-1}(t)$$

Bスプライン
基底関数

$$N_i^0(t)=\begin{cases}1 & t\in[t_i,t_{i+1}) \\ 0 & t\notin[t_i,t_{i+1})\end{cases}$$

区間内

区間内

Bスプライン基底関数

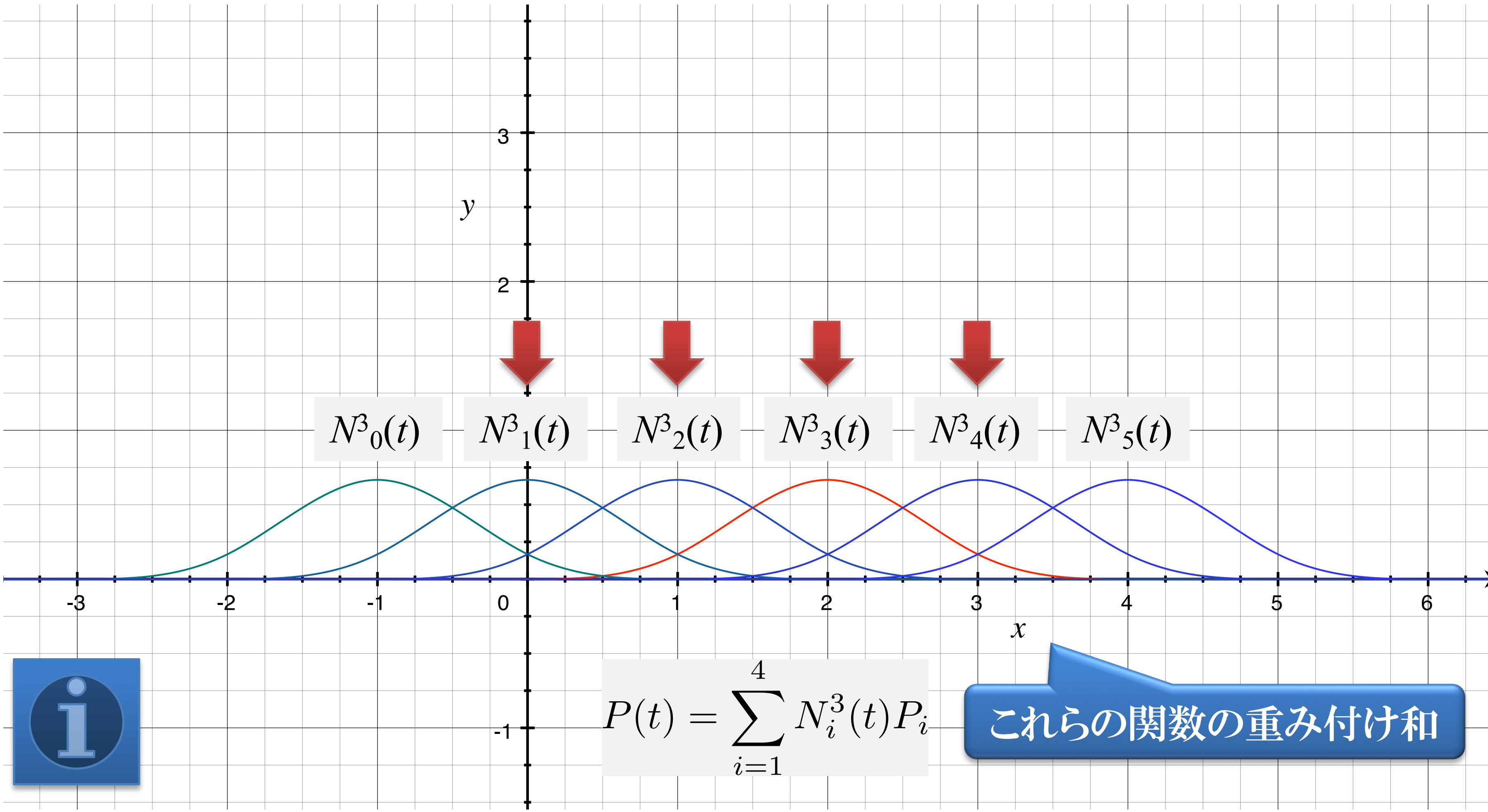
ノット列 $(t_0, t_1, t_2, \ldots, t_9) = (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ のとき

$$N_3^3 = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{6}t^3 & t \in [0, 1) \\ \frac{1}{6}(-3t^3 + 12t^2 - 12t + 4) & t \in [1, 2) \\ \frac{1}{6}(3t^3 - 24t^2 + 60t - 44) & t \in [2, 3) \\ \frac{1}{6}(4 - t)^3 & t \in [3, 4) \\ 0 & t \in [4, +\infty) \end{cases}$$

$$N_0^3 = N_3^3(t+3)$$
$$N_1^3 = N_3^3(t+2)$$
$$N_2^3 = N_3^3(t+1)$$

$$N_4^3 = N_3^3(t-1)$$
$$N_5^3 = N_3^3(t-2)$$
$$N_6^3 = N_3^3(t-3)$$

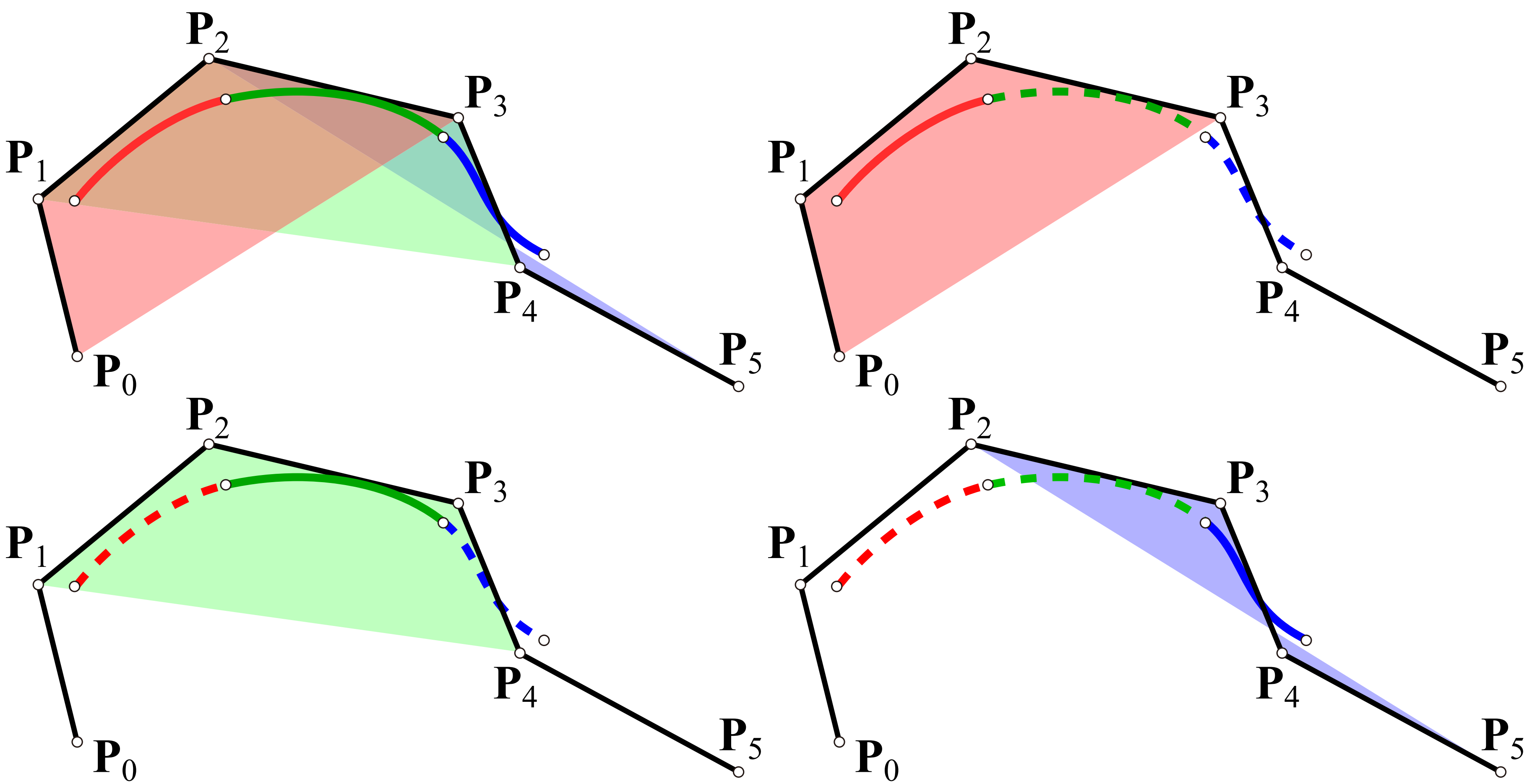
Bスプライン基底関数のグラフ



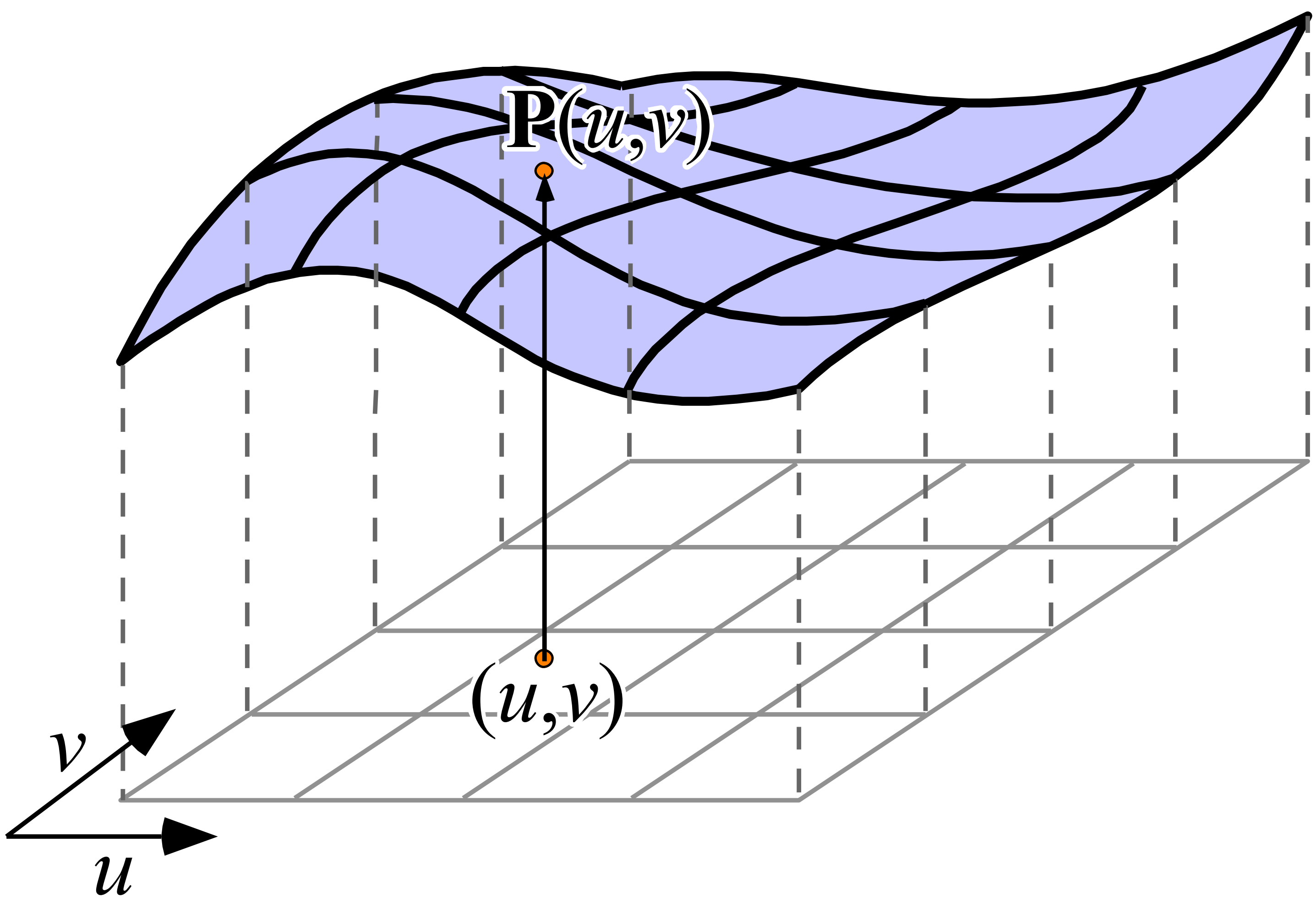
$$P(t) = \sum_{i=1}^{4} N_i^3(t) P_i$$

これらの関数の重み付け和

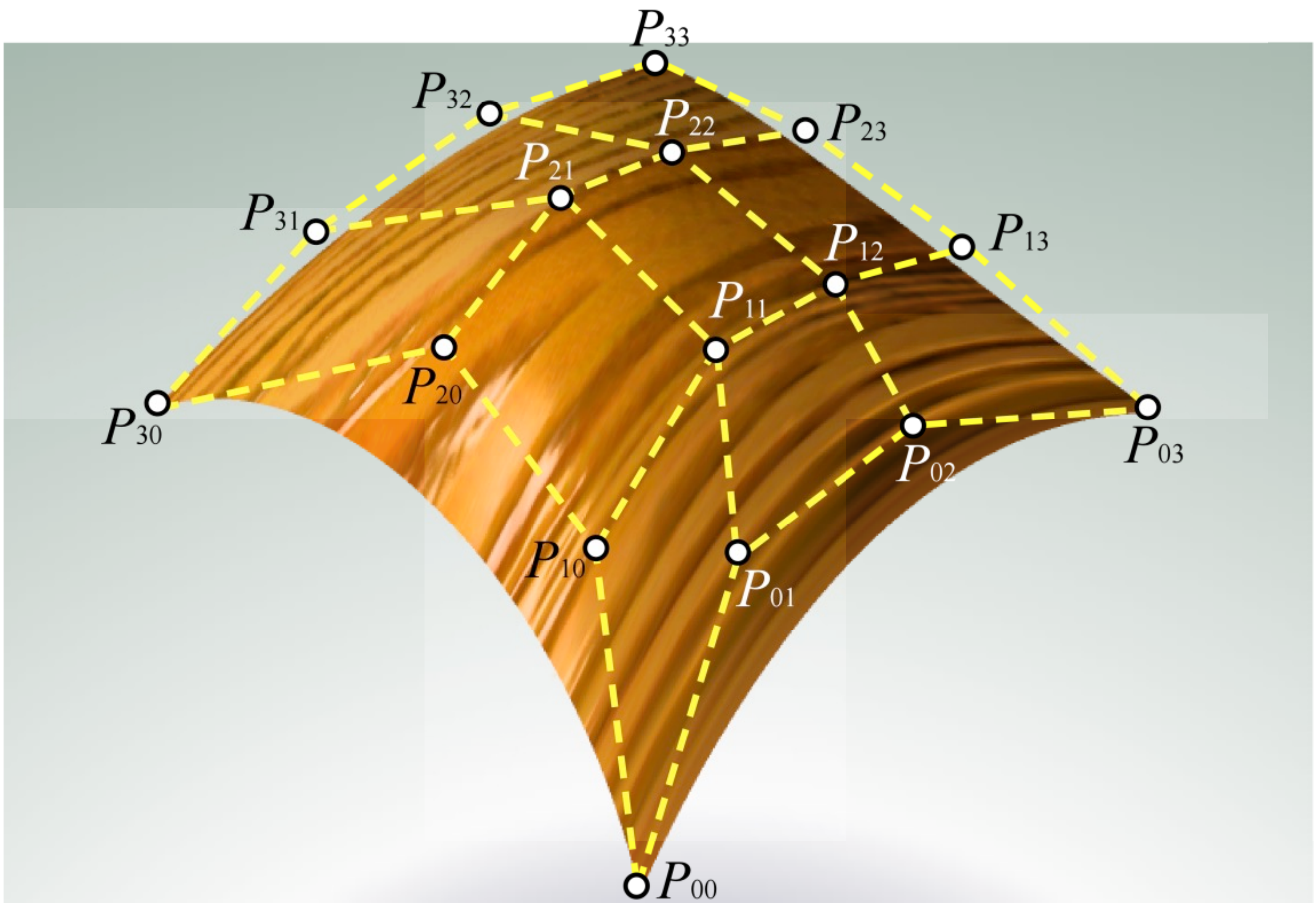
Bスプライン曲線の接続



パラメトリック曲面



双3次ベジェ曲面



m, n 次のベジェ曲面

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \mathbf{P}_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v)$$

$$B_i^m(u) = \begin{pmatrix} m \\ i \end{pmatrix} u^i (1-u)^{m-i}$$

$$B_j^n(v) = \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} v^j (1-v)^{n-j}$$

おわり